Algebraické struktury se dvěma operacemi

Definice 1: Na množině M jsou definovány dvě binární operace $*$ a $\circ$. Operace $*$ je **distributivní vzhledem k operaci** $\circ$ právě tehdy, když platí

$$(\forall x, y, z \in M)[\,(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)] \quad \dots \text{pravý distributivní zákon (PDZ)}$$

$$\wedge$$

$$[z * (x \circ y) = (z * x) \circ (z * y)] \quad \dots \text{levý distributivní zákon (LDZ).}$$

Značíme $\underline{* \ D \ \circ}$.

Příklad 1: Na množině M uvažujeme dvě binární operace obyčejné sčítání $+$ a obyčejné násobení $\cdot$. Operace $\cdot$ je distributivní vzhledem k operaci $+$ právě tehdy, když platí:

$$(\forall x, y, z \in M)[\,(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)] \quad \dots \text{pravý distributivní zákon (PDZ)}$$

$$\wedge$$

$$[z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y)] \quad \dots \text{levý distributivní zákon (LDZ).}$$

Značíme $\underline{\cdot \ D \ +}$. („Zákon o roznásobování závorek“)

Definice 2: Nechť M je neprázdná množina, ve které jsou definovány dvě operace $\oplus$ a $\odot$

- Algebraická struktura $(M, \oplus, \odot)$ se nazývá **polookruh** právě tehdy, když:
  - I. Operace $\oplus$ je ND $\wedge$ A $\wedge$ K
  - II. Operace $\odot$ je ND $\wedge$ A
  - III. Platí $\odot$ D $\oplus$
- Je-li operace $\odot$ navíc K, pak polookruh $(M, \oplus, \odot)$ nazýváme **komutativní polookruh**.
- Pologrupu $(M, \oplus)$ nazýváme **aditivní pologrupa**.
- Pologrupu $(M, \odot)$ nazýváme **multiplikativní pologrupa**.
- Polookruh $(M, \oplus, \odot)$, jehož aditivní pologrupa $(M, \oplus)$ je komutativní grupou, se nazývá **okruh.**
- Je-li operace $\odot$ navíc K, pak okruh $(M, \oplus, \odot)$ nazýváme **komutativní okruh.**
- Nechť $(M, \oplus, \odot)$ je okruh. Prvky $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = 0$, se nazývají **dělitelé nuly** okruhu $(M, \oplus, \odot)$.
- Komutativní okruh $(M, \oplus, \odot)$, ve kterém neexistují dělitelé nuly, se nazývá **obor integrity**.
- Okruh $(M, \oplus, \odot)$, pro který platí, že $(M - \{0\}, \odot)$ je grupa, se nazývá **těleso**.
- Je-li operace $\odot$ navíc K, pak těleso $(M, \oplus, \odot)$ nazýváme **komutativní těleso.**

Poznámka 1: Uvažujeme polookruh $(M, \oplus, \odot)$:

- Operace $\oplus$ se nazývá **<u>sčítání.</u>** V zápise

$$a \oplus b = c$$

nazýváme prvky a, b **<u>sčítanci</u>**, prvek c nazýváme **<u>součet</u>** prvků a, b.

Neutrální prvek nazýváme **<u>nulový prvek</u>**, značíme 0. Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **<u>opačný prvek</u>** k prvku a, značíme $-a$. Existuje-li prvek x, pro který platí $b \oplus x = a$, nazýváme jej **<u>rozdíl</u>** prvků a, b a zapisujeme

$$x = a \ominus b.$$

V tomto zápise prvek a nazýváme **<u>menšenec</u>**, prvek b nazýváme **<u>menšitel</u>**. Pokud existuje prvek $-b$, pak platí $x = a \ominus b = a \oplus (-b)$. Operace $\ominus$ se nazývá **<u>odčítání</u>**.

- Operace $\odot$ se nazývá **<u>násobení.</u>** V zápise

$$a \odot b = c$$

nazýváme prvek a, resp. b **1. činitel**, resp. **2. činitel**, prvek c nazýváme **<u>součin</u>** prvků a, b. Neutrální prvek nazýváme **<u>jednotkový prvek</u>**, značíme 1. Pokud k prvku a existuje prvek inverzní, nazýváme jej **<u>převrácený prvek</u>** k prvku a, značíme $\frac{1}{a}$ nebo též a^{-1}. Existuje-li pro prvky a, $\underline{b \neq 0}$ prvek x, pro který platí $b \odot x = a$, nazýváme jej **<u>podíl</u>** prvků a, b a zapisujeme $x = a \oslash b$ nebo taky $x = \frac{a}{b}$.

V tomto zápise prvek a nazýváme **<u>dělenec</u>** (**<u>čitatel</u>**), prvek b nazýváme **<u>menšitel</u>** (**<u>jmenovatel</u>**). Pokud existuje prvek $\frac{1}{b}$, resp. b^{-1}, pak platí $x = a \oslash b = \frac{a}{b} = a \odot \frac{1}{b} = a \odot b^{-1}$. Operace $\oslash$ se nazývá **<u>dělení</u>**.

> Podíl prvků pro $b = 0$ nedefinujeme, neboť:
>
> 1. v případě, že $a = 0$, je řešením rovnice $0 \cdot x = 0$ každý prvek množiny M.
> 2. v případě, že $a \neq 0$, rovnice $0 \cdot x = a$ nemá řešení v množině M.
>
> Případ 1. vede k tomu, že by dělení nebylo operací!

Příklad 2: Určete typ algebraické struktury $(P(M), \cup, \cap)$, kde $M = \{a, b\}$.

Schéma k *Definici 2:*

	operace a vlastnosti	algebraická struktura
	$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A	***Polookruh (komutativní)***
	$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A	
	$\odot$ D $\oplus$	
	$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI	***Okruh (komutativní)***
	$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A	
	$\odot$ D $\oplus$	
	$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI	***Komutativní okruh bez dělitelů nuly = Obor integrity***
$(M, \oplus, \odot)$	$\odot$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A	
	$\odot$ D $\oplus$	
	Neexistují $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in M$, pro které platí $a \odot b = 0$.	
	$\oplus$ ND $\wedge$ K $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI	***Těleso (komutativní)***
	$\odot$ ND $\wedge$ (K) $\wedge$ A	
	$\odot$ D $\oplus$	
	$(M - \{0\}, \odot)$ je grupa, tj. na množině $M - \{0\}$ je operace $\odot$ ND $\wedge$ A $\wedge$ EN $\wedge$ EI	

<u>Příklady algebraických struktur číselných množin se dvěmi operacemi</u>

- $\mathbb{N}$ - {1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel
- $\mathbb{N}_0$ - {0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech přirozených čísel s nulou (množina všech nezáporných celých čísel)
- $\mathbb{C}$ - {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...} - množina všech celých čísel
- $\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel (zlomky)
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel

Příklad 2: Uvažujme binární operace obyčejné sčítání + a obyčejné násobení $\cdot$ v číselných množinách:

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s jednotkovým prvkem**

$+ \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \cancel{EN} \wedge \cancel{EI}$

$\cdot \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$
e = 1

$\cdot$ D +

---

2. $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ **komutativní polookruh s nulovým (e = 0) a jednotkovým prvkem (e = 1)**

$+ \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$
e = 0

$\cdot \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$
e = 1

$\cdot$ D +

---

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **komutativní okruh bez dělitelů nuly = obor integrity**

$+ \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$
e = 0

$\cdot \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI}$
e = 1

$\cdot$ D +

V množině $\mathbb{C}$ neexistují dělitelé nuly, tj. neexistují $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in \mathbb{C}$, pro které platí $a \cdot b = 0$

---

4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **komutativní těleso**

$+ \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$
e = 0

$\cdot \quad \ldots \underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge EI$
e = 1

$\cdot$ D +

$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupa, tzn. na množině $\mathbb{Q} - \{0\}$ a na množině $\mathbb{R} - \{0\}$ má operace $\cdot$ vlastnosti: $\underline{ND} \wedge \underline{K} \wedge \underline{A} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI}$