**IMAk02 Základy algebry – Úlohy k procvičení - řešení**

1. Jsou dány množiny *A = {a, b, c, d}* a *B = {1, 2, 3, 4}.* Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující binární relace z množiny *A* do množiny *B* jsou zobrazení. Pokud ano, určete přesně typ zobrazení:

*a) R1 = {[b, 1], [c, 2], [d, 3]},*

je zobrazení z množiny *A* do množiny *B* (není zobrazením ani celé množiny *A* ani na celou množinu *B*) a je prosté.

*b) R2 = {[a, 1], [b, 2], [a, 3]},*

není zobrazení z množiny *A* do množiny *B.*

*c) R3 = {[a, 1], [b, 3], [c, 2], [d, 4]},*

je vzájemně jednoznačné zobrazení množin *A, B.*

*d) R4 = {[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 1]},*

je zobrazení celé množiny *A* do množiny *B*, není prosté.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících množin je ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel ***N***. Které z uvedených množin jsou nekonečné?

*A = {*1*,* $\frac{1}{2}$ *,* $\frac{1}{4}, \frac{ 1}{8}, …$*},* *B = {7, 6, 4, a, x}, D = {x ∈* ***N****: x = 5n ∧ n ∈* ***N****}.*

S množinou ***N*** jsou ekvivalentní množiny *A* a *D*. Vzájemně jednoznačné zobrazení množin ***N*** a *A* je např. {*[0, 1], [1,* $\frac{1}{2}$ *], [2,* $\frac{1}{4}$ *], [3,* $\frac{1}{8} $*], …*}, obecně {*[x, y] ∈* ***Q****2: x ∈* ***N*** *∧**y =2− x*}.Vzájemně jednoznačné zobrazení množin ***N*** a *D* je např. {*[0, 50], [1, 51], [2, 52], [3, 53], …*}, obecně {*[x, y] ∈* ***N****2: x ∈* ***N*** *∧**y =5x*}. Protože ***N*** je nekonečná množina, jsou nekonečné I množiny *A, D*. Množina *B* je konečná, neboť ani jedna její vlastní podmnožina není s množinou *B* ekvivalentní.

3. Zjistěte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají operace \*, ∘, △ definované v množině *M = {a, b, c}*:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| \* | *a* | *b* | *c* |
| *a* | *b* | *a* | *c* |
| *b* | *a* | *b* | *c* |
| *c* | *c* | *c* | *b* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ∘ | *a* | *b* | *c* |
| *a* | *c* | *c* | *c* |
| *b* | *c* | *c* | *c* |
| *c* | *c* | *c* | *c* |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| △ | *a* | *b* | *c* |
| *a* | *c* |  | *a* |
| *b* |  | *c* | *b* |
| *c* | *a* | *b* | *c* |

Dále určete neutrální a agresivní prvky, pokud existují. Stanovte přesně typ každé algebraické struktury, kterou množina *M* spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

Operace \*: ND, K, $¬$ A, EN, EI, $¬$ ZR. Neutrální prvek je *b*, agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\overbar{a}$ = *a*, $\overbar{b}$ = *b,* $\overbar{c}$ = *c. (M, \*)* je komutativní grupoid s neutrálním prvkem, který není pologrupa.

Operace ∘: ND, K, A, $¬$ EN, $¬$ EI, $¬$ ZR. Neutrální prvek neexistuje, agresivní prvek je *c*. Inverzní prvky neexistují. *(M,* ∘*)* je komutativní pologrupa, která není grupou.

Operace △: $¬$ ND, $¬$ K, $¬$ A, EN, EI, $¬$ ZR. Neutrální prvek je *c*, agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\overbar{a}$ = *a*, $\overbar{b}$ = *b,* $\overbar{c}$ = *c. (M,* △*)* je algebraická struktura s jednou operací, která není grupoid.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností *ND, A, K, EN, EI, ZR* mají následující operace (***C*** je množina všech celých čísel):

a) ∘ *= {[x, y. z]∈* ***N3****: z = x + 2y}* neboli *x* ∘ *y = x + 2y.*

ND, $¬$ K, $¬$ A, $¬$ EN, $¬$ EI, $¬$ ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

b) \* *= {[x, y. z]∈* ***C3****: z = x + y + 1}* neboli *x* \* *y = x + y + 1.*

ND, K, A, EN, EI, ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

5. Určete přesně typ algebraických struktur s jednou operací (***Q*** je množina všech racionálních čísel, ***Q****0+*je množina všech nezáporných racionálních čísel):

*(****N****, +), (****N****,* ***·****), (****N****, −), (****Q****0+, +), (****Q****0+,* ***·****), (****Q****− {0}, +), (****Q****− {0},* ***·****).*

*(****N****, +)* komutativní pologrupa, která není grupou (nemá neutrální prvek)

*(****N****,* ***·****)* komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

*(****N****, −)* není ani grupoid

*(****Q****0+, +)* komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

*(****Q****0+,* ***·****)* komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

*(****Q****− {0}, +)* není ani grupoid (např. − 2 + 2 = 0, 0 ∉ ***Q****− {0}*)

*(****Q****− {0},* ***·****)* komutativní grupa

6. Určete přesně typ algebraických struktur se dvěma operacemi:

*(****N****, +,* ***·****), (****Q****0+, +,* ***·****), (****Q****−{0}, +,* ***·****).*

*(****N****, +,* ***·****)* komutativní polookruh s jednotkovým prvkem

*(****Q****0+, +,* ***·****)* komutativní polookruh s jednotkovým prvkem

*(****Q****−{0}, +,* ***·****)* není ani polookruh

7. Je dána množina *M = {a, b,}.* Určete přesně typ algebraických struktur

*(*P*(M), ∪), (*P*(M), ∩), (*P(*M), −), (*P*(M), △), (*P*(M), ∪, ∩), (*P*(M), ∩, ∪),*

kde P*(M)* je potenční system množiny *M*. Platí uvedené závěry i pro všechny množiny *M*, které mají nejméně dva prvky?

*(*P*(M), ∪)* komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

*(*P*(M), ∩)* komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

*(*P(*M), −)* nekomutativní grupoid, který není pologrupa (ND, $¬$ K, $¬$ A, $¬$ EN, $¬$ EI, $¬$ ZR)

*(*P*(M), △)* komutativní grupa (ND, K, A, EN, EI, ZR); *e=* $∅$*,*$\overbar{ A }$ = *A*, *A△X= B ⇒ X = A△B.*

*(*P*(M), ∪, ∩)* komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

*(*P*(M), ∩, ∪)* komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

Uvedené závěry platí pro všechny množiny, které mají nejméně dva prvky.