Relace dělitelnosti: $a \mid b \iff b = a x$

dělitel (a), dělenec (b)

$4 \mid 12 \quad 3 \mid 6 \quad 5 \nmid 8$

vlastnosti: v $\mathbb{N}$: R, AS, T

v $\mathbb{C}$: R, ~~AS~~, T např. $2 \neq -2$, $2 \mid -2$, $-2 \mid 2$

Dokažte: ① $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ je dělitelné sedmi. $n \in \mathbb{N}$

$$2^n + 2 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n \qquad \text{pozn. } a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

② Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel (prostřední sudé), je dělitelný šesti.

$$(2n-1) + 2n + (2n+1) = 6n$$

③ Součin dvou po sobě jdoucích čísel je sudé číslo, u tří součin je dělitelný šesti.

$n \cdot (n+1)$ jedno je sudé druhé liché

$n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ alespoň jedno je sudé, jedno je dělitelné třemi (zbytkové třídy modulo 3).

④ Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak $n^2 - 1$ je dělitelné osmi, je-li n liché.

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 4 \cdot 2u = 8u \quad (\text{podle } 3)$$

⑤ Dokažte kritérium dělitelnosti čtyřmi.

$$n = a_n 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 =$$
$$= 100 \cdot (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots a_2) + (10 a_1 + a_0) =$$
$$= 4 \cdot [25 (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots a_2)] + (10 a_1 + a_0) =$$
$$= 4A + (10 a_1 + a_0) \ ;$$

Číslo n jsme rozložili na 2 sčítance. Sčítanec $4A$ je dělitelný čtyřmi, dělitelnost tedy závisí na druhém sčítanci. To je poslední dvojčíslí. Př. $1528 = 15 \cdot 100 + 28$.

6) Pokaždé kritérium dělitelnosti devíti.

Pomocné úvahy: $1:9 = 0$, zb. 1, tj. $1 = 0\cdot 9 + 1$; $1 = 1$;
$10:9 = 1$, zb. 1, tj. $10 = 1\cdot 9 + 1$;
$100:9 = 11$, zb. 1, tj. $100 = 11\cdot 9 + 1$;
$1000:9 = 111$, zb. 1, tj. $1000 = 111\cdot 9 + 1$.

hypotéza: $10^n = \underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot 9 + 1$, obecně $\underline{\underline{10^n = 9\cdot k_n + 1}}$

$$n = a_n 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0 =$$
$$= a_n(9k_n+1) + a_{n-1}(9k_{n-1}+1) + \ldots a_2(9k_2+1) + a_1(9k_1+1) + a_0 =$$
$$= 9a_nk_n + a_n + 9a_{n-1}k_{n-1} + a_{n-1} + \ldots + 9a_2k_2 + a_2 + 9a_1k_1 + a_1 + a_0 =$$
$$= 9(a_nk_n + a_{n-1}k_{n-1} + \ldots + a_2k_2 + a_1k_1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0) =$$
$$= 9K + \underbrace{(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)}_{\text{ciferný součet}}$$

nechť $n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, pak počet všech dělitelů čísla n je $\tau(n) = (k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_m+1)$

Příklad: počet dělitelů čísla 72: $72 = 2^3\cdot 3^2$

dělitel obecně $\frac{2^3\cdot 3^2}{2^p\cdot 3^q}$, $p\in\{0,1,2,3\}$, $q\in\{0,1,2\}$,

tedy $\tau(72) = 4\cdot 3 = 12$

výpis všech dělitelů:

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

sdružení dělitelé:

$1\cdot 72$
$2\cdot 36$
$3\cdot 24$
$4\cdot 18$
$6\cdot 12$
$8\cdot 9$

Určete rozměry všech obdélníků, které mají obsah 2000 cm^2

$$2000 = 2 \cdot 1000 = 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot (2^3 \cdot 5^3) = 2^4 \cdot 5^3$$

$$\tau(2000) = 5 \cdot 4 = 20$$

1 x 2000 | 10 x 200
2 x 1000 | 16 x 125
4 x 500 | 20 x 100
5 x 400 | 25 x 80
8 x 250 | 40 x 50

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
5^0	1	2	4	8	16
5^1	5	10	20	40	80
5^2	25	50	100	200	400
5^3	125	250	500	1000	2000

Určete všechna čísla menší než 100, která mají právě 10 dělitelů.

$10 = 2 \cdot 5$, tj. jeden prvočinitel p_1^4, druhý p_2^1.

Dvě možnosti $2^4 \cdot 3^1 = 48$, $2^4 \cdot 5 = 80$

Určete takové sdružené dělitele čísla 72, jejichž součet je 27.

$a \cdot b = 72$
$a + b = 27$

$\Rightarrow b = \frac{72}{a}$ dosadíme

$a + \frac{72}{a} = 27 \,|\cdot a$

$a^2 + 72 = 27a$

$a^2 - 27a + 72 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 288}}{2} = \frac{27 \pm 21}{2} = \begin{cases} 24 \\ 3 \end{cases}$$

Čísla 3 a 24.

Kritérium dělitelnosti 11:

Ciferný součet čísel na sudých řádech – ciferný součet čísel na lichých řádech.

Př: 243545891 6

$6 + 9 + 5 + 5 + 7 = 32$

$1 + 8 + 4 + 3 + 2 = 18$

$32 - 18 = 14$

není dělitelné 11;

Kritérium dělitelnosti sedmi

Pomocné úvahy:

$1 = 0 \cdot 7 + 1$ $\quad 1000 = 142 \cdot 7 + 6$, tj. $6 \equiv -1 \pmod 7$

$10 = 1 \cdot 7 + 3$ $\quad 10000 = 1428 \cdot 7 + 4$, $\quad 4 \equiv -3 \pmod 7$

$100 = 14 \cdot 7 + 2$ $\quad 100000 = 14285 \cdot 7 + 5$, $\quad 5 \equiv -2 \pmod 7$

Řada čísel $1, 3, 2, -1, -3, -2$ se opakuje i

vážený ciferný součet

Příklad: Číslo 273545 8916 je dělitelné sedmi?

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 7 & 3 & 5 & 4 & 5 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$-2 + 14 + 9 + 5 - 8 - 15 - 8 + 18 + 3 + 6 = 22$ není děl. sedmi,

zbytek je 1

zobecnění — dělitelnost třemi

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 7 & 3 & 5 & 4 & 5 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$2 + 7 + 3 + 5 + 4 + 5 + 8 + 9 + 1 + 6 = 50$ není dělitelné třemi

dělitelnost jedenácti

$10 = 0 \cdot 11 + 10 \quad (-1)$

$100 = 9 \cdot 11 + 1 \quad (+1)$

atd.

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 7 & 3 & 5 & 4 & 5 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$-2 + 7 - 3 + 5 - 4 + 5 - 8 + 9 - 1 + 6 =$

$= (7 + 5 + 5 + 9 + 6) - (2 + 3 + 4 + 8 + 1) = 32 - 18 = 14$

váha 10^n pro n sudé je $+1$,

váha 10^n pro n liché je -1;

Dokažte, že součin $236 \cdot 378$ je dělitelný 36

$236 = 2 \cdot 118 = 2^2 \cdot 59$

$378 = 2 \cdot 189 = 2 \cdot 3 \cdot 63 = 2 \cdot 3^2 \cdot 21 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$236 \cdot 378 = (2^2 \cdot 59) \cdot (2 \cdot 3^3 \cdot 7) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 59 = \underbrace{(2^2 \cdot 3^2)}_{36} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 59)$

Určete nejmenší nenulové číslo, kterým je třeba násobit:

a) číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přir. čísla

b) číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přir. čísla

úvahy: $(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ všechny exponenty sudé

$(2 \cdot 3^2 \cdot 7^4)^3 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 7^{12}$ všechny exponenty násobky tří

potom $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $\sqrt[3]{3^9 \cdot 5^3 \cdot 7^{12}} = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^4$

a) $1224 = 2 \cdot 612 = 2^2 \cdot 306 = 2^3 \cdot 153 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$

$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^1) \cdot (2 \cdot 17) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17^2$ násobíme číslem 34

b) $600 = 2 \cdot 300 = 2^2 \cdot 150 = 2^3 \cdot 75 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

$(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) \cdot (3^2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27000$

násobíme číslem 45

Připíšeme-li k libovolnému trojcifernému číslu totéž číslo zprava, dostaneme šesticiferné číslo dělitelné sedmi, jedenácti a třinácti. Dokažte.

235235 642642 atp. obecně abcabc

$a 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 100100a + 10010b + 1001c =$

$= 1001(100a + 10b + c) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + c)$

např. $642642 = 1001 \cdot 642$

Dokažte, že čísla 353535, 424242, tj. čísla tvaru ababab, jsou dělitelná čísly 3, 7, 13 a 37.

obecně ababab

$a 10^5 + b \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b =$

$= 101010a + 10101b = 10101(10a + b) =$

$= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10a + b)$;

zk: $273 \cdot 37 = 10101$

např. $424242 = 10101 \cdot 42$