Určete, zda následující relace je reflexivní, symetrická, tranzitivní a souvislá:

a) rovnoběžnost přímek v rovině

b) kolmost přímek v rovině

c) mimoběžnost přímek v prostoru

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

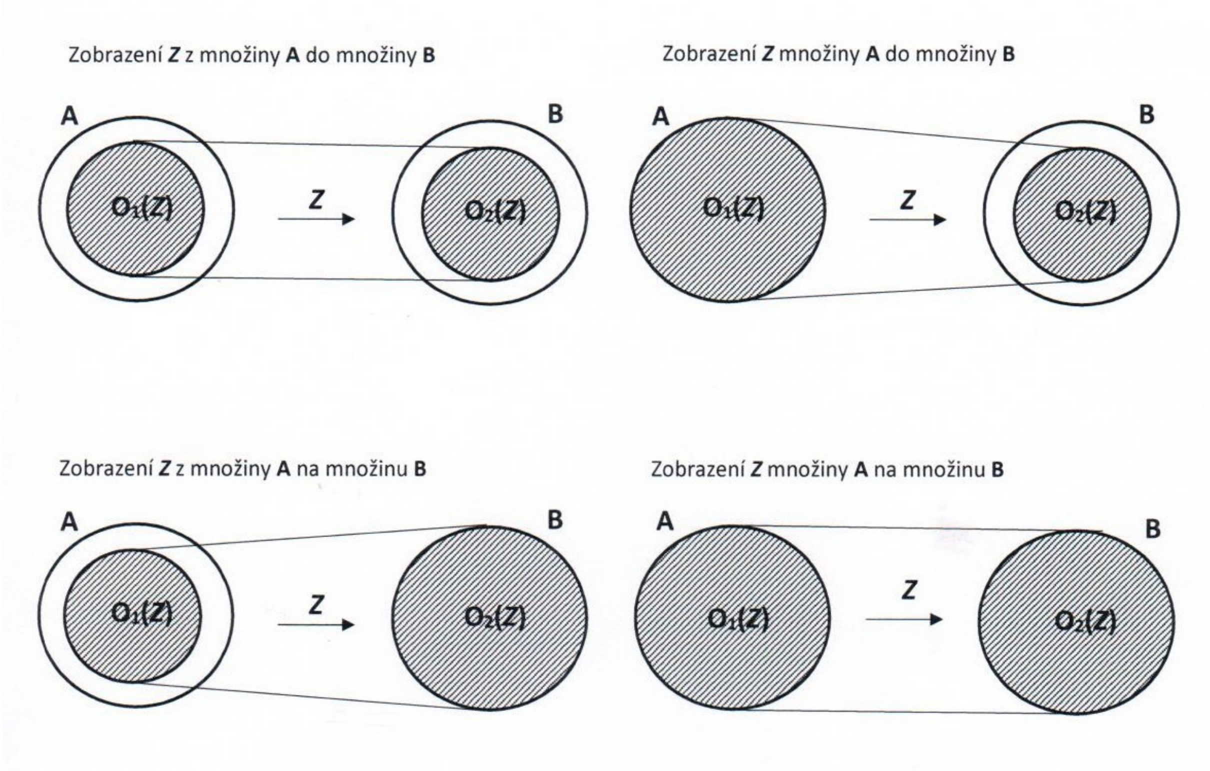
*Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a,b] \in$ **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme $R: A \rightarrow B$.*

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže $[a,b] \in$ **R**, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení **R**; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A$: existuje $b \in B$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B$: existuje $a \in A$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. Platí $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

- I) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A do množiny B**.
- II) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A na množinu B**.
- III) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A na množinu B**.
- IV) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A do množiny B**.



*Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** zobrazení právě tehdy, když relace Z^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A.*

Uzlový graf prostého zobrazení Z z množiny A do množiny B je charakteristický tím, že do každého bodu, který znázorňuje prvek $y \in B$, směřuje nejvýše jedna šipka. Můžeme tedy říci, že platí následující věta: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když pro každé $y \in B$ platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku $x \in A$ v zobrazení Z.

*V praxi používáme pro rozlišení prostého zobrazení následující tvrzení: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když **každé dva různé vzory mají různé obrazy.***

Př. 1: Jsou dány množiny A = {a, b, c} a B = {u, v}. Nechť R_1, R_2, R_3, R_4 jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto:

a) R_1 = {[a, v], [b, v], [c, u]}, b) R_2 = {[a, u], [b, v]},

c) R_3 = {[a, v], [b, v], [c, v]}, d) R_4 = {[a, u], [b, u]}.

Rozhodněte, zda tyto relace jsou zobrazení z množiny A do množiny B. Pokud ano, určete typ zobrazení.

a) R_1 je zobrazení množiny A na množinu B, není prosté.

b) R_2 je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

c) R_3 je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

d) R_4 je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

Př. 2: Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B.

a) $\mathbf{R_1}$ = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[x,a], [z,b]},

c) $\mathbf{R_3}$ = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

$\mathbf{R_1}$ není zobrazení.

$\mathbf{R_2}$ je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

$\mathbf{R_3}$ je zobrazení celé množiny A na množinu B, není prosté (nemůže být).

Př. 3: Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná.

R = {[x, z], [c, c], [y, c]}, S = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

1) jedno zobrazení $\mathbf{R_1}$ z množiny A do množiny B,

2) jedno zobrazení $\mathbf{R_2}$ množiny A do množiny B,

3) jedno zobrazení $\mathbf{R_3}$ množiny A na množinu B,

4) jedno zobrazení $\mathbf{R_4}$ z množiny A na množinu B.

Řešení: a) R je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

S je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

b) T = {[x, z], [x, b], [a, z], [c, x]}.

c) $\mathbf{R_1}$ = {[x, z]}, je prosté.

$\mathbf{R_2}$ = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, z]}, není prosté.

$\mathbf{R_3}$ = {[x, c], [y, b], [a, z], [c, x]}, je prosté.

$\mathbf{R_4}$ neexistuje.

Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme ***bijektivní zobrazení*** *nebo také* ***vzájemně jednoznačné zobrazení****.*

Př. 4: Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) $\mathbf{R_1}$ = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

c) $\mathbf{R_3}$ = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}. Vzájemně jednoznačné zobrazení.

a) Prosté zobrazení z množiny A do množiny B.

b) Zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

c) Prosté zobrazení množiny A na množinu B.

Permutací *konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).*

Př. 5: Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {1, 2, 3}.

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Definice: *Nechť* ***R*** *je zobrazení z množiny M do množiny N a* ***S*** *je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace* ***R*** *∘* ***S*** *je zobrazení a nazývá se* ***složené zobrazení*** *ze zobrazení* ***R*** *a* ***S****.*

Př. 6: Jsou dána zobrazení R, S v množině A = {1, 2, 3, 4} takto:

R = {[1, 3], [4, 2], [2, 3], [3, 1]},

S = {[1, 1], [4, 2], [2, 1], [3, 4]}.

Určete složené relace R ○ S, S ○ R.

Řešení: R ○ S = {[1, 4], [4, 1], [2, 4], [3, 1]},

S ○ R = {[1, 3], [4, 3], [2, 3], [3, 2]}. Vidíme, že R ○ S ≠ S ○ R.

Složení dvou zobrazení je vždy zobrazení, složení dvou permutací je permutace.

Př. 7: Složte permutace b ○ c, f ○ d, e ○ b z předchozího příkladu.

b ○ c = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ = d , f ○ d = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = b, e ○ b = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ = c.

Povšimněte si, že platí e ○ d = d ○ e = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, což je identická permutace. Obě permutace d, e jsou navzájem inverzní.

Řekneme, že množiny A, B jsou ***ekvivalentní*** *právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Značíme A ~ B.*

Př. 8: Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y}, C = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které množiny jsou ekvivalentní.

Ř: Množiny A, B nejsou ekvivalentní (neexistuje prosté zobrazení množiny A na množinu B). Množiny A, C jsou ekvivalentní (existuje prosté zobrazení množiny A na množinu C, například R = {[a,3],[b,1],[c,2]}), tj. **A ~ C**.

Množina M je ***vlastní podmnožinou*** *množiny N právě tehdy, když M je podmnožinou N a současně M ≠ N.*

Řekneme, že množina A je ***konečná*** *právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.*

*Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.*

Př. 9: Uvažujme množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a množinu S všech kladných sudých čísel. Zjistěte, zda jsou ekvivalentní.

Řešení: Připomeneme, že $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,\ldots\}$, $S = \{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$.
Uvažujme relaci $R = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times S;\ y = 2x\}$.

Relace R je prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu S, neboť
ke každému $x \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $y \in S$ takové, že $[x,y] \in R$,
ke každému $y \in S$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{N}$ takové, že $[x,y] \in R$.

Tedy $\mathbb{N} \sim S$.

Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je nekonečná, neboť je ekvivalentní s množinou S všech kladných sudých čísel, přičemž S je vlastní podmnožinou množiny $\mathbb{N}$.

*Nechť A, B jsou **konečné** množiny. Pak platí: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$, tedy dvě konečné množiny jsou ekvivalentní, právě když mají stejný počet prvků.*

Př. 10: Jsou dány množiny $M = \{1,2,3,4\}$ a $N = \{a,b,c,d\}$.

a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete jeho typ.
c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
e) Na množině N definujte dvě různé permutace P_1, P_2 a určete permutace $P_1 \bullet P_2$ a $P_2 \bullet P_1$.

Řešení: a) $R = \{[2, b], [2, c], [3, a]\}$.

b) $Z_1 = \{[c, 4]\}$. Prosté zobrazení z N do M.
$Z_2 = \{[a, 4], [b, 4], [c, 1], [d, 1]\}$. Zobrazení celé N do M, není prosté.

c) $R \bullet Z_1 = \{[2, 4]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$R \bullet Z_2 = \{[2, 4], [2, 1], [3, 4]\}$. Není zobrazení.

d) $B_1 = \{[a, 4], [b, 3], [c, 2], [d, 1]\}$, $B_2 = \{[a, 2], [b, 4], [c, 3], [d, 1]\}$. Platí $A \sim B$.

e) $P_1 = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]\}$, $P_2 = \{[a, c], [b, d], [c, b], [d, a]\}$.

Jinak zapsáno $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$.

$P_1 \bullet P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$, $P_2 \bullet P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$.

Př. 11: Je dána množina $M = \{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:

$R = \{[x, y] \in M \times M;\ x \neq y \ \Rightarrow\ x + y = 5\}$,

$T = \{[x, y] \in M \times M;\ x \neq 2 \ \vee\ y = x + 1\}$,

$U = \{[x, y] \in M \times M;\ x < 3 \ \wedge\ y = x + 1\}$,

$V = \{[1,3], [2,1], [3,2]\}$.

a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?

b) Zapište relace R^{-1}, V^{-1}, $V \bullet V$, $U \bullet V$, $R \bullet U$, $R \bullet (V \bullet U)$. Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

Řešení: a) $R = \{[2, 3], [3, 2], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.

$T = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [2, 3]\}$. Není zobrazení.

$U = \{[1, 2], [2, 3]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$V = \{[1, 3], [2, 1], [3, 2]\}$. Permutace množiny M.

b) $R^{-1} = \{[3, 2], [2, 3], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.

$V^{-1} = \{[3, 1], [1, 2], [2, 3]\}$. Permutace množiny M.

$V \bullet V = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$. Permutace množiny M.

$U \bullet V = \{[1, 1], [2, 2]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$R \bullet U = \{[3, 3], [1, 2], [2, 3]\}$. Zobrazení celé M do M, není prosté.

$V \bullet U = \{[2, 2], [3, 3]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$R \bullet (V \bullet U) = \{[2, 3], [3, 2], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.

Binární operace v množině

Nechť M je libovolná neprázdná množina. ***Binární operací*** $\circ$ *v množině M rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu M x M do množiny M.*

- Jestliže v binární operaci je vzoru $[x,y] \in M \times M$ přiřazen obraz $z \in M$, píšeme:
  1. $x \circ y = z$; prvek $z \in M$ se nazývá **výsledek operace** $\circ$.
  2. $\circ: M \times M \rightarrow M$.

Zápisu $[[x,y], z] \in \circ$, odpovídá zápis $x \circ y = z$ (tj. z je výsledek operace $\circ$).

Zápisu $[[1,2], 3] \in +$ odpovídá $1 + 2 = 3$
(tj. 3 je výsledek operace sčítání čísel 1 a 2).

Zápisu $[[2,3], 6] \in \cdot$, odpovídá $2 \cdot 3 = 6$
(tj. 6 je výsledek operace násobení čísel 2 a 3).

Označení binárních operací: $+, \cdot, \circ, *, \square$,..

Příklady binárních operací ve školské matematice:

1) Sčítání (+), odčítání (-), násobení ($\cdot$), dělení (:), umocňování,… (pracujeme s nimi v číselných množinách).
2) Sjednocení (), průnik (), rozdíl (-), symetrický rozdíl (Δ) množin,… (pracujeme s nimi v systémech množin).

Určení binární operace: Tabulkou nebo předpisem.

Vlastnosti binárních operací:

Definice : Binární operace $\circ$ v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in M \times M$, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná na** množině M). Značíme **ND**.

Symbolicky: $x, y \in M)(\exists\, z \in M)[\, x \circ y = z]$.

Definice: Binární operace $\circ$ definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

$$x, y \in M)[\, x \circ y = y \circ x].$$

Značíme **K**.

Definice: Binární operace $\circ$ definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

$$x, y, z \in M)[\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)].$$

Značíme **A**.

Definice: Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$. Existuje-li prvek $e \in M$, pro který platí:

$$x \in M)[\, x \circ e = e \circ x = x].$$

Pak se prvek $e \in M$ nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci $\circ$**.**

Značíme **EN**.

Poznámka. Je-li operace $\circ$ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EN** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $x \circ e$ nebo $e \circ x$.

Definice : Nechť v množině M je definována binární operace $\circ$ a nechť e je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci $\circ$. Prvek $\bar{a} \in M$ nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $a \in M$ v operaci $\circ$ v množině M právě tehdy, když platí:

$$\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e.$$

Jestliže $(a \in M)(\exists\, \bar{a} \in M)[\, \bar{a} \circ a = a \circ \bar{a} = e]$, řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci $\circ$. Značíme **EI**.

Poznámka . Je-li operace $\circ$ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EI** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti $\bar{a} \circ a = a \circ \bar{a}$.

Definice : Říkáme, že binární operace ○ definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

$$a, b \in \mathrm{M})\ )(\exists\ x, y \in \mathrm{M})[\ a \circ x = b \quad y \circ a = b].$$

Značíme **ZR**.

Poznámka. Je-li operace ○ komutativní, pak v zápisu vlastnosti **ZR** lze vynechat jedna z výrokových forem $a \circ x = b$ nebo $y \circ a = b$.

Definice: Nechť v množině M je definována binární operace ○. Existuje-li prvek $g \in$ M, pro který platí:

$$x \in \mathrm{M})[\ x \circ g = g \circ x = g].$$

Pak se prvek g nazývá **agresivním** prvkem množiny M vzhledem k operaci ○.

Určování vlastností operací

I. **Určených předpisem** – přímým výpočtem

II. **Určených tabulkou**:

ND – tabulka zcela vyplněna prvky množiny M

K – tabulka souměrná podle hlavní diagonály

A – kromě výjimek nelze z tabulky přímo poznat – viz dále

EN – existuje řádek a sloupec shodný se záhlavím tabulky

EI – v každém řádku a každém sloupci tabulky je neutrální prvek

ZR – v každém řádku i sloupci tabulky jsou všechny prvky množiny M

Agresivní prvek $g \in$ M poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek g.

Užitečné vztahy: K ⇒ ND, A ⇒ ND, EI ⇒ EN (užívají se v obměněném tvaru)

$$A \Rightarrow (EI \Leftrightarrow ZR)$$

Určování asociativnosti z tabulek:

1. Pohledem (velmi zřídka)

2. Ověřením všech možných trojic prvků (s využitím cvičení 9 – 13, s. 123 – 124) (těžkopádné a zdlouhavé)

3. Využitím obměny implikace A ⇒ ND a implikace A ⇒ (EI ⇔ ZR)

4. Podle tvrzení: „ Operace, která splňuje EN ∧ EI ∧ ZR a současně není asociativní, existuje na množině o nejméně pěti prvcích".

Užití na příkladech:

ad 1. Např.

o	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

ad 3. Nejčastější případ – rozbor implikace A ⇒ (EI ⇔ ZR). Je-li u EI a ZR rozdílná pravdivostní hodnota, pak operace není asociativní. Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 1, pak postupujeme podle bodu 4 (v písemných pracích jsou zadávány tabulky o maximálně čtyřech prvcích). Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 0, pak je nutno postupovat podle bodu 1 nebo 2. Zpravidla jde o bod 1, kdy určíme asociativnost přímo z tabulky.

Př. 12: Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M = $\{a,b,c\}$ operace určená tabulkou:

*	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	b

○	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

□	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

■	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

$\ast$: $\cancel{ND} \wedge \cancel{K} \wedge \cancel{A} \wedge EN \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$

$\circ$: $ND \wedge \cancel{K} \wedge \cancel{A} \wedge \cancel{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge ZR$

$\square$: $\cancel{ND} \wedge \cancel{K} \wedge A \wedge EN \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$

$\blacksquare$: $ND \wedge \cancel{K} \wedge \cancel{A} \wedge EN \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$

Př. 13: V množině M = $\{a,b,c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:

a) $K \wedge \cancel{EN}$ b) $ND \wedge \cancel{K} \wedge EN$ c) $ND \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ d) $A \wedge \cancel{ZR}$

e) $\cancel{K} \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ f) $EI \wedge ZR$ g) $ND \wedge \cancel{A} \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$

a)	a	b	c
a	c	c	b
b	a	b	c
c	b	c	b

b)	a	b	c
a	b	a	a
b	c	b	b
c	a	b	c

c)	a	b	c
a	b	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c

d)	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

e)	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	c	c	a

f)	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

g)	a	b	c
a	c	a	a
b	a	c	b
c	a	b	c
