

M U N I

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky –
předmět IMAk02 (jaro 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Vlastnosti binárních operací II.

Základy algebry a aritmetiky –
předmět IMAk02 (jaro 2020)

Prezentace č. 4



- *Definice 6:* Necht' je v množině M (!) definována binární operace \circ a necht' existuje prvek $e \in M$, který je neutrálním prvkem množiny M vzhledem k operaci \circ . Prvek $\bar{x} \in M$ nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $x \in M$ v operaci \circ v množině M právě tehdy, když platí:

$$x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e$$

Jestliže ke každému prvku $x \in M$ existuje vzhledem k operaci \circ prvek inverzní $\bar{x} \in M$, hovoříme o vlastnosti existence inverzního prvku ke každému prvku množiny M vzhledem k operaci \circ . Značíme **EI**.

symbolicky: $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

- *Příklad 6:*

- operace sčítání (+)...na množině \mathbb{N}_0 **nemá** vlastnost **EI** (neexistuje ke každému číslu $x \in \mathbb{N}_0$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{N}_0$, aby platilo $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 0$, tj. neexistuje ke každému číslu z množiny \mathbb{N}_0 prvek inverzní). **X**

- **např:** pro $x = 3$: $3 + \bar{x} = \bar{x} + 3 = 0$ $\bar{x} = -3$, ale $-3 \notin \mathbb{N}_0$

EI: symbolicky: $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

• *Příklad 6:*

- operace sčítání (+)...na množině \mathbb{C} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} **má** vlastnost EI (existuje např. ke každému celému číslu $x \in \mathbb{C}$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{C}$, aby platilo $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 0$. Toto číslo nazýváme **číslem opačným** a značíme $\bar{x} = -x$). ✓

Vzhledem k operaci sčítání:

- k číslu $2 \in \mathbb{C}$ je opačným číslem číslo $-2 \in \mathbb{C}$, tuto skutečnost zapíšeme $\bar{2} = -2$, neboť platí: $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ (0 je neutrální prvek množiny \mathbb{C} vzhledem ke sčítání)
- k číslu $-2 \in \mathbb{C}$ je opačným číslem číslo $2 \in \mathbb{C}$, tuto skutečnost zapíšeme $-\bar{2} = 2$,
- k číslu $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ je opačným číslem číslo $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, neboť platí: $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 0$ (0 je neutrální prvek množiny \mathbb{Q} vzhledem ke sčítání)
- k číslu $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ je opačným číslem číslo $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, neboť platí $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$ (0 je neutrální prvek množiny \mathbb{R} vzhledem ke sčítání)
- operace odčítání (-)...na množině \mathbb{C} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} **nemá** vlastnost EI (neboť vzhledem k této operaci uvedené množiny nemají neutrální prvek). ✗

EI: symbolicky: $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

- operace násobení (\cdot)...na množině \mathbb{N} , \mathbb{C} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} **nemá** vlastnost EI (neexistuje např. ke každému celému číslu $x \in \mathbb{N}$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{N}$, aby platilo $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 1$). **X**

Vzhledem k operaci násobení:

- k číslu $2 \in \mathbb{N}$ neexistuje $\bar{x} \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo $2 \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot 2 = 1$ (1 je neutrální prvek množiny \mathbb{N} vzhledem k násobení)

např: pro $x = 2$: $2 \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot 2 = 1 \quad \bar{x} = \frac{1}{2}$, ale $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

- k číslu $2 \in \mathbb{Q}$ existuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ takové, aby platilo $2 \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot 2 = 1$ ($\bar{x} = \frac{1}{2}$, kde $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$),
- k číslu $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ existuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ takové, aby platilo $\frac{1}{2} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \frac{1}{2} = 1$ ($\bar{x} = 2$, kde $2 \in \mathbb{Q}$),
ale
- k číslu $0 \in \mathbb{Q}$ neexistuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, takové, aby platilo $0 \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot 0 = 1$ (Právě pouze kvůli číslu 0, které jediné nemá v množině \mathbb{Q} , \mathbb{R} inverzní prvek vzhledem k násobení, **nemá** operace násobení vlastnost EI)

EI: symbolicky: $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

• *Příklad 6:*

- operace násobení (\cdot)... $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$ **má** vlastnost EI, tj. ke každému nenulovému racionálnímu či reálnému číslu x existuje inverzní prvek \bar{x} vzhledem k násobení takový, že platí: $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 1$. ✓

Toto číslo nazýváme **číslem převráceným** a značíme $\bar{x} = \frac{1}{x}$.

Vzhledem k operaci násobení na množině $\mathbb{Q} - \{0\}$ nebo $\mathbb{R} - \{0\}$:

- k číslu $3 \in \mathbb{Q} - \{0\}$ je převráceným číslem číslo $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, tuto skutečnost zapíšeme

$\bar{3} = \frac{1}{3}$, neboť platí: $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ (1 je neutrální prvek množiny $\mathbb{Q} - \{0\}$ vzhledem k násobení)

- k číslu $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ je převráceným číslem číslo $-3 \in \mathbb{Q} - \{0\}$, neboť platí:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-3) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

- *Definice 7:* Říkáme, že binární operace \circ definovaná na množině M (je ND) má vlastnost **řešitelnosti základních rovnic** právě tehdy, když platí

$$(\forall a, b \in M)(\exists x, y \in M)[a \circ x = b \wedge y \circ a = b] \quad \text{Značíme } \mathbf{ZR}.$$

Poznámka 1: Jestliže je operace \circ komutativní (**K**), pak lze rovnice uvedené v definici zredukovat na jediný tvar, tj.

$$(\forall a, b \in M)(\exists x \in M)[a \circ x = b]$$

- *Příklad 7:*

- operace sčítání (+)...na množině \mathbb{N} **není ZR** $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})[a + x = b]$ (např. pro $a = 4, b = 3$ nemá rovnice $4 + x = 3$ řešení na množině \mathbb{N}) **X**
- operace sčítání (+)...na množině $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **je ZR** $(\forall a, b \in \mathbb{C})(\exists x \in \mathbb{C})[a + x = b]$ **✓**
- operace násobení (\cdot)...na množině $\mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ **není ZR** $(\forall a, b \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})[a \cdot x = b]$ **X**
(např. pro $a = 4, b = 3$ nemá rovnice $4 \cdot x = 3$ řešení na množině \mathbb{N})
(např. pro $a = 0, b = 3$ nemá rovnice $0 \cdot x = 3$ řešení na množině $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$)
- operace násobení (\cdot)...na množině $\mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\}$ **je ZR** **✓**
 $(\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\})(\exists x \in \mathbb{Q} - \{0\})[a \cdot x = b]$