

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Algebraické struktury

Základy algebry a aritmetiky – předmět
IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 5



Algebraické struktury s jednou operací

V předchozích prezentacích jste se seznámili s vlastnostmi operací v množině.

- Neomezeně definovaná operace v množině M **ND**
- Komutativní operace na množině M **K**
- Asociativní operace na množině M **A**
- Existence neutrálního prvku v množině M vzhledem k operaci **EN**
- Existence inverzního prvku pro každý prvek množiny M vzhledem k operaci **EI**
- Řešitelnost základních rovnic na množině M s operací **ZR**



Dodatek k minulé prezentaci

Agresivní prvek je pomyslným protikladem prvku neutrálního. Zatímco neutrální prvek nedokáže „změnit“ žádný prvek, jestliže s ním provedeme operaci, agresivní prvek vytvoří po operaci s jakýmkoli prvkem opět sám sebe.

Symbolicky:

Neutrální prvek (značíme e) - $\forall a \in M: e \circ a = a \circ e = a$

Agresivní prvek (značíme g) - $\forall a \in M: g \circ a = a \circ g = g$



Algebraické struktury s jednou operací

V této prezentaci se budeme věnovat pouze speciálnímu pojmenování množin s operací, která na nich splňuje určité vlastnosti.

Definice 1:

Uspořádaná dvojice (M, o) , kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace o , se nazývá **algebraická struktura s jednou operací**.

Příklad 1:

Promyslete si, jaké vlastnosti má známá operace sčítání na přirozených číslech, jinak řečeno algebraická struktura $(\mathbf{N}, +)$.



Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 1:

Promyslete si, jaké vlastnosti má známá operace sčítání na přirozených číslech, jinak řečeno algebraická struktura $(\mathbf{N}, +)$.

Řešení:

- Jestliže $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, pak určitě i $a+b \in \mathbf{N} \rightarrow$ platí **ND**
- Platí $a+b=b+a$ pro všechna $a, b \in \mathbf{N} \rightarrow$ platí **K**
- Platí $a+(b+c)=(a+b)+c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbf{N} \rightarrow$ platí **A**
- Pro každé $a \in \mathbf{N}$ platí $a+0=a$, tedy neutrální prvek $e=0$. Avšak 0 nepatří mezi přirozená čísla \rightarrow neplatí **EN**
- Neexistuje neutrální prvek \rightarrow neplatí **EI**
- Například pro dvojici čísel 5, 7 nemůžeme najít čísla $x, y \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $7+x=5$ a zároveň $y+7=5 \rightarrow$ neplatí **ZR**



Algebraické struktury s jednou operací

Nyní si můžeme nazvat jednotlivé typy algebraických struktur v závislosti na vlastnostech na nich definovaných operací. Pokud nesplňuje (M, o) ani vlastnost ND, nazýváme ji pouze algebraickou strukturou.

Definice 2 - 7:

Algebraická struktura (M, o) se nazývá právě tehdy, když splňuje operace o definovaná na M vlastnosti .

	ND	A	EN	EI	K
GRUPOID	■				
POLOGRUPA	■	■			
GRUPA	■	■	■	■	
KOMUTATIVNÍ GRUPOID	■				■
KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA	■	■			■
KOMUTATIVNÍ GRUPA	■	■	■	■	■



Algebraické struktury s jednou operací

Jinak řečeno ...

Definice 2:

Algebraická struktura (M, o) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když je operace o neomezeně definovaná v M (tj. definovaná na M).

Definice 3:

Grupoid (M, o) , jehož operace je asociativní, se nazývá **pologrupa**.

Definice 4:

Pologrupa (M, o) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci o a ke každému $x \in M$ existuje v M inverzní prvek, se nazývá **grupa**.

Jestliže je operace o v množině M navíc komutativní, pak k názvu algebraické struktury přidáme přívlastek „komutativní“, tedy komutativní grupoid, komutativní pologrupa, případně komutativní grupa.



Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 2:

Určete typ algebraické struktury

- a) $(\mathbf{N}, +)$
- b) $(\mathbf{C}, +)$
- c) (\mathbf{R}, \cdot)
- d) $(\mathbf{R} - \{0\}, \cdot)$
- e) $(\mathbf{C}, :)$



Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 2:

Určete typ algebraické struktury

Řešení:

- a) $(\mathbf{N}, +)$ splňuje vlastnosti ND, K, A \rightarrow **komutativní plogrupa**
- b) $(\mathbf{C}, +)$ splňuje vlastnosti ND, K, A, EN, EI \rightarrow **komutativní grupa**
- c) (\mathbf{R}, \cdot) splňuje vlastnosti ND, K, A, EN \rightarrow **komutativní plogrupa s neutrálním prvkem**
- d) $(\mathbf{R} - \{0\}, \cdot)$ splňuje vlastnosti ND, K, A, EN, EI \rightarrow **komutativní grupa**
- e) $(\mathbf{C}, :)$ nespĺňuje ani vlastnost ND \rightarrow **algebraická struktura**

