Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Binární operace určené tabulkou

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Prezentace č. 6

Binární operace dané tabulkou

Uvažujme binární operaci ○ v množině M zapsanou pomocí operační tabulky, viz příklad:

Příklad 1: Je dána množina $\mathbf{M = \{a, b, c\}}$ a operace ○ v množině $\mathbf{M}$ daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, ○)**.

a)

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

hlavní diagonála

řádek sloupec výsledek operace

a ○ a = b

a ○ b = c

c ○ b = b

Binární operace dané tabulkou

a) $\mathbf{M = \{a, b, c\}}$

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	a	b	c

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \underline{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

$\mathbf{e = c}$ (neutrální prvek)

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \mathrm{b} \\ \bar{b} &= a \\ \bar{b} &= \mathrm{b} \\ \bar{c} &= \mathrm{c} \end{aligned}\right\} \text{inverzní prvky}$$

(M, ∘) komutativní grupoid

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	0	0	1

Binární operace dané tabulkou

b) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \cancel{\mathbf{K}} \wedge \cancel{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \underline{\mathbf{ZR}}$

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	0	0

(M, ∘) grupoid s vlastností ZR

Binární operace dané tabulkou

c) $M = \{a, b, c\}$

∘	a	b	c
a	c	a	a
b		c	b
c	a	b	c

$\cancel{ND} \wedge \cancel{A} \wedge \cancel{K} \wedge \underline{EN} \wedge \underline{EI} \wedge \cancel{ZR}$

e = c (neutrální prvek)

$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = a \\ \bar{b} = b \\ \bar{c} = c \end{array}\right\}$ inverzní prvky

(M, ∘) algebraická struktura

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \Rightarrow & (ZR & \Leftrightarrow & EI) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Binární operace dané tabulkou

d) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ **EI** ∧ **ZR**

?

$\mathbf{e} = \mathbf{c}$ (neutrální prvek)

$\bar{a} = b$
$\bar{b} = a$
$\bar{c} = c$

inverzní prvky

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M
- **A** z tabulky obvykle nepoznáme (určíme z definice nebo ze vztahu A ⇒ (ZR ⇔ EI)
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	1	1
1				

?

Problém asociativity

- Platí $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1

1) Má-li operace ∘ právě jednu z vlastností ZR, EI, pak není A.

$$\underline{ZR} \wedge \cancel{EI} \Rightarrow \cancel{A}$$

$$\cancel{ZR} \wedge \underline{EI} \Rightarrow \cancel{A}$$

2) Jestliže operace ∘ má nebo nemá současně obě z vlastností ZR, EI, může nebo nemusí být A.

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

Problém asociativity

2) Jestliže operace **o** má nebo nemá současně obě z vlastností ZR, EI, může nebo nemusí být A.

A	$\Rightarrow$	(ZR	$\Leftrightarrow$	EI)
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

- Vlastnost asociativity vyšetříme přímo z definice:

  $(\forall\, a, b, c \in \mathrm{M})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)] \sim$ *abc*

Problém asociativity

2) Vlastnost asociativity vyšetříme přímo z definice:

$(\forall\, a, b, c \in \mathrm{M})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$ *abc (trojice)*

$[(b \circ c) \circ c = b \circ (c \circ c)]$ *bcc (trojice)*

$[(c \circ a) \circ a = c \circ (a \circ a)]$ *caa (trojice)*

Existuje celkem 27 možností trojic:

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

MUNI

Binární operace dané tabulkou

d) **M = {a, b, c}** **vyšetřujeme A ?**

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

aaa: $(a \circ a) \circ a = a \circ (a \circ a)$

$$\underbrace{(a \circ a)}_{b} \circ a = a \circ \underbrace{(a \circ a)}_{b}$$

$$\underbrace{b \circ a}_{c} = \underbrace{a \circ b}_{c}$$

$$\underline{c = c} \quad \boldsymbol{A}$$ ✓

bbb: $(b \circ b) \circ b = b \circ (b \circ b)$

$$\underbrace{(b \circ b)}_{a} \circ b = b \circ \underbrace{(b \circ b)}_{a}$$

$$\underbrace{a \circ b}_{c} = \underbrace{b \circ a}_{c}$$

$$\underline{c = c} \quad \boldsymbol{A}$$ ✓

Tímto způsobem bychom měli vyšetřit všech 27 trojic z tabulky výše, ale tato cesta je příliš zdlouhavá. Existují nějaká pravidla, jak zredukovat tento počet?

Ke snížení počtu možností pro vyšetření asociativity nám pomohou tato pomocná pravidla:

1. Jestliže alespoň jeden z prvků *a*, *b*, *c* ∈ M je neutrálním prvkem množiny M vzhledem k operaci ○ pak trojice ***abc*** splňuje asociativnost operace ○ v množině M.
2. Jestliže operace ○ je v množině M komutativní, pak každá trojice ***aaa*** splňuje asociativnost operace ○ v množině M.
3. Jestliže alespoň jeden z prvků *a*, *b*, *c* ∈ M je agresívním prvkem množiny M vzhledem k operaci ○, pak trojice ***abc*** splňuje asociativnost operace ○ v množině M.

d)

○	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

1. **e = c** (neutrální prvek)
2. **K**
3. agresivní prvek neexistuje

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

M U N I

Zůstalo celkem 6 trojic: *aab, aba, baa, abb, bab, bba*, u kterých je třeba vyšetřit asociativitu dle definice, tj. $(\forall\, a, b, c \in \mathrm{M})[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$.

d)

∘	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

aab: $(a \circ a) \circ b \;=\; a \circ (a \circ b)$

$b \circ b = a \circ c$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

aba: $(a \circ b) \circ a \;=\; a \circ (b \circ a)$

$c \circ a = a \circ c$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

baa: $(b \circ a) \circ a \;=\; b \circ (a \circ a)$

$c \circ a = b \circ b$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

abb: $(a \circ b) \circ b \;=\; a \circ (b \circ b)$

$c \circ b = a \circ a$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bab: $(b \circ a) \circ b \;=\; b \circ (a \circ b)$

$c \circ b = b \circ c$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bba: $(b \circ b) \circ a \;=\; b \circ (b \circ a)$

$a \circ a = b \circ c$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

<u>ND</u> ∧ **<u>A</u>** ∧ **<u>K</u>** ∧ **<u>EN</u>** ∧ **<u>EI</u>** ∧ **<u>ZR</u>**

e = c (neutrální prvek)

$\bar{a} = b$

$\bar{b} = a$

$\bar{c} = c$

agresivní prvek neexistuje

(M, ∘) komutativní grupa s vlastností ZR

Binární operace dané tabulkou

e) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	b	b

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \mathbf{A} \wedge \cancel{\mathbf{K}} \wedge \cancel{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

?

g = a (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. ~~**EN**~~ ..... Toto pravidlo nevyužijeme
2. ~~K~~.........Toto pravidlo nevyužijeme
3. **AG** ...... pravidlo využijeme, **g = a**

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \Rightarrow & (\mathrm{ZR} & \Leftrightarrow & \mathrm{EI}) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & & \end{array}$$

?

Zůstalo celkem 8 trojic: *bbb, bbc, bcb, cbb, bcc, cbc, ccb, ccc* u kterých je třeba vyšetřit asociativitu dle definice, tj. $(\forall\, a, b, c \in M)[(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)]$.

e)

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	b	b

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

bbb: $(b \circ b) \circ b = b \circ (b \circ b)$

$b \circ b = b \circ b$

$\underline{b = b}$ ***A*** ✓

bbc: $(b \circ b) \circ c = b \circ (b \circ c)$

$b \circ c = b \circ a$

$\underline{a = a}$ ***A*** ✓

bcb: $(b \circ c) \circ b = b \circ (c \circ b)$

$a \circ b = b \circ b$

$\underline{a = b}$ ***A*** ✗

$\underline{\textbf{ND}} \wedge \cancel{\textbf{A}} \wedge \cancel{\textbf{K}} \wedge \cancel{\textbf{EN}} \wedge \cancel{\textbf{EI}} \wedge \cancel{\textbf{ZR}}$

$\mathbf{g} = a$ (agresivní prvek)

(M, ○) grupoid

Binární operace dané tabulkou

f) $M = \{a, b, c\}$

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

$\underline{ND} \wedge A \wedge \underline{K} \wedge \underline{EN} \wedge \cancel{EI} \wedge \cancel{ZR}$

?

$e = a$ (neutrální prvek)

$\bar{a} = a$

$g = b$ (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. **EN** .... $e = a$, pravidlo využijeme
2. **K** ....pravidlo nevyužijeme
3. **AG** ...... pravidlo využijeme, $g = b$

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

$A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

? 0 1 0 1 0

1

Binární operace dané tabulkou

f) **M = {a, b, c}**

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	b

ND ∧ **A** ∧ **K** ∧ **EN** ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

e = ***a*** (neutrální prvek)

$\bar{a} = a$

g = **b** (agresivní prvek)

Pro určení asociativity využijeme pomocná pravidla:

1. EN .... **e** = ***a***, pravidlo využijeme
2. K ....pravidlo využijeme
3. AG ...... **g** = **b**, pravidlo využijeme,

aaa	*aab*	*aba*	*baa*	*abb*	*bab*	*bba*	*aac*	*aca*
caa	*acc*	*cac*	*cca*	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*
cba	*bbb*	*bbc*	*bcb*	*cbb*	*bcc*	*cbc*	*ccb*	*ccc*

(M, ∘) komutativní pologrupa s neutrálním prvkem

MUNI