Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Binární operace určené tabulkou – příklady k procvičení

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Prezentace č. 7

Binární operace dané tabulkou

Příklad 1: Je dána množina $\mathbf{M = \{1, 0, -1\}}$ a operace ○ v množině $\mathbf{M}$ daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, ○)**.

○	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Binární operace dané tabulkou

Řešení:

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

∘	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

$\mathbf{e} = \mathbf{1}$ (neutrální prvek)

$\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$

$\overline{-\mathbf{1}} = \mathbf{-1}$

$\mathbf{g} = \mathbf{0}$ (agresivní prvek)

(M, ∘) komutativní pologrupa s neutrálním a agresivním prvkem

Asociativita: Operace ∘ má vlastnosti **EN, K** a existuje agresivní prvek (využijeme všech tří pomocných pravidel, tj. ∘ je asociativní (viz příklad 1 f) v prezentaci č. 6, kde jsme měli podobnou situaci)

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M … je splněno
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály … je splněno
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky … je splněno $\mathbf{e} = \mathbf{1}$ (neutrální prvek)
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály … není splněno, prvek 0 nemá inverzní prvek v množině M vzhledem k operaci ∘, k prvkům 1, -1 existují inverzní prvky: $\overline{\mathbf{1}} = 1$, $\overline{-\mathbf{1}} = -1$
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M … není splněno
- **A** A ⇒ (ZR ⇔ EI)

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	0	1	0
1				

Binární operace dané tabulkou

Příklad 2: Je dána množina $\mathbf{M} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ a operace $\circ$ v množině $\mathbf{M}$ daná tabulkou. Určete vlastnosti operace $\circ$. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury $(\mathbf{M}, \circ)$.

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

MUNI

Řešení:

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \underline{\mathbf{A}} \wedge \underline{\mathbf{K}} \wedge \cancel{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

∘	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

Asociativita: Operace ∘ má pouze agresivní prvek **a** (mohli bychom tedy využít pouze 3. pomocné pravidlo, tj. vyšetřit 8 trojic, v nichž se prvek **a** nevyskytuje - bbb, ccc, bbc, bcb, cbb, ccb, cbc, bcc). Vzhledem k charakteru tabulky je zřejmé, že výsledek operací všech dvojic prvků z množiny M je vždy prvek **a**, tedy operace je asociativní.)

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M … je splněno
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály … je splněno
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky … není splněno
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály … není splněno, k žádnému prvku množiny M neexistuje prvek inverzní vzhledem k operaci ∘
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M … není splněno
- **A** $A \Rightarrow (ZR \Leftrightarrow EI)$

$$\begin{array}{ccccc} A & \Rightarrow & (ZR & \Leftrightarrow & EI) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & & \end{array}$$

g = **a** (agresivní prvek)

(M, ∘) komutativní pologrupa s agresivním prvkem

MUNI

Binární operace dané tabulkou

Příklad 3: Je dána množina $\mathbf{M = \{1, 2\}}$ a operace □ v množině $\mathbf{M}$ daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury $\mathbf{(M, \square)}$.

□	1	2
1	1	1
2	1	2

Řešení:

<u>ND</u> ∧ **<u>A</u>** ∧ **<u>K</u>** ∧ **<u>EN</u>** ∧ ~~EI~~ ∧ ~~ZR~~

Asociativita: Operace ○ má vlastnosti **EN, K** a existuje agresivní prvek, tj. operace □ je asociativní (trojic by v případě dvouprvkové množiny bylo pouze $2^3 = 8$, tedy *111, 112, 121, 211, 222, 221, 212, 122*).

□	1	2
1	1	1
2	1	2

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M … je splněno
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály … je splněno
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky … je splněno **e = 2**
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály … není splněno, k prvku **1** neexistuje prvek inverzní vzhledem k operaci □
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M … není splněno
- **A** A ⇒ (ZR ⇔ EI)

A	⇒	(ZR	⇔	EI)
0	1	0	1	0
1				

$\mathbf{e} = \mathbf{2}$ (neutrální prvek)

$\overline{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$

$\mathbf{g} = \mathbf{1}$ (agresivní prvek)

(M, □) komutativní pologrupa s agresivním a neutrálním prvkem

Binární operace dané tabulkou

Příklad 4: Je dána množina **M = {0, 1, 2, 3}** a operace + (obyčejné sčítání v množině **M**). Určete vlastnosti operace +. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, +)**.

Pokuste se v dalších úvahách promyslet vlastnosti operací obyčejného odčítání, násobení a dělení v množině **M = {0, 1, 2, 3}.**

MUNI

Binární operace dané tabulkou

Řešení: Operační tabulka vypadá následovně:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Operace + v množině M není ND, neboť
např. 2 + 3 = 5, ale 5 ∉ M.

Protože není ND, není ani K, A, ZR

(M, +) je algebraická struktura

$\cancel{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \cancel{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \cancel{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

$\mathbf{e} = \mathbf{0}$ (neutrální prvek)
$\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ (pouze 0 má inverzní prvek vzhledem k operaci + v množině **M**)

Binární operace dané tabulkou

Příklad 5: Je dána množina $\mathbf{M = \{k, l, m\}}$ a operace □ v množině $\mathbf{M}$ daná tabulkou. Určete vlastnosti operace ○. Pokud existuje neutrální nebo agresivní prvek, určete je. K jednotlivým prvkům stanovte prvky inverzní, pokud existují. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, □)**.

□	k	l	m
k	m	l	k
l	k	m	l
m	k	l	m

Řešení:

$\underline{\mathbf{ND}} \wedge \cancel{\mathbf{A}} \wedge \cancel{\mathbf{K}} \wedge \underline{\mathbf{EN}} \wedge \underline{\mathbf{EI}} \wedge \cancel{\mathbf{ZR}}$

□	k	l	m
k	m	l	k
l	k	m	l
m	k	l	m

$\mathbf{e} = \mathbf{m}$ (neutrální prvek)

$\bar{k} = \mathbf{k}$

$\bar{l} = \mathbf{l}$

$\bar{m} = \mathbf{m}$

(M, ∗) grupoid s neutrálním prvkem a vlastností EI

- **ND** tabulka je celá vyplněna prvky množiny M … je splněno
- **K** prvky tabulky, která je celá vyplněna prvky množiny M, jsou souměrně rozloženy podle hl. diagonály … není splněno
- **EN** alespoň jeden řádek a jeden sloupec jsou stejné jako záhlaví tabulky … je splněno $\mathbf{e} = \mathbf{m}$
- **EI** každý řádek a každý sloupec obsahuje neutrální prvky tak, že ve všech řádcích a všech sloupcích existují takové, že jsou rozloženy podle hlavní diagonály … je splněno
- **ZR** každý řádek a každý sloupec obsahují všechny prvky množiny M … není splněno
- **A** $\begin{array}{ccccc} A & \Rightarrow & (ZR & \Leftrightarrow & EI) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

Binární operace dané tabulkou

Příklad 6: Je dána množina $\mathbf{M} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. V množině $\mathbf{M}$ definujte operaci □ danou tabulkou, pro jejíž vlastnosti platí:

a) **~~N~~D** $\wedge$ **<u>EI</u>**
b) **A** $\wedge$ **~~Z~~R**

Rozhodněte a zdůvodněte, které z dalších vlastností operace □ má. Pokud existují prvky inverzní k jednotlivým prvkům, určete je. Rozhodněte o typu algebraické struktury **(M, □)**.

Řešení:

a) ~~ND~~ ∧ <u>EI</u>

□	a	b	c
a			
b			
c			

<u>1. krok:</u> zvolíme neutrální prvek, např**. e = b** a dle této volby vyplníme tabulku

□	a	b	c
a		a	
b	a	b	c
c		c	

<u>2. krok</u> : aby platila vlastnost EI, musí být prvek **b** v každém řádku i každém sloupci obsažen a musí být rozložen souměrně podle hl. diagonály

$$\overline{a} = a$$
$$\overline{b} = b$$
$$\overline{c} = c$$

□	a	b	c
a	b	a	
b	a	b	c
c		c	b

<u>3. krok</u> : Tabulka z 2. kroku již zadání splňuje, neboť není ND. Případně můžeme na zbývající dvě pozice zapsat například hodnotu x, což je prvek, který nepatří do množiny M

□	a	b	c
a	b	a	x
b	a	b	c
c	x	c	b

Operace určené tabulkami ve 2. a 3. kroku obě splňují zadání, její vlastnosti tedy jsou: **~~ND~~** ∧ **~~A~~** ∧ **~~K~~** ∧ **<u>EN</u>** ∧ **<u>EI</u>** ∧ **~~ZR~~**

(M, □) je algebraická struktura

Řešení:

a) ~~ND~~ ∧ <u>EI</u>

□	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c	b	c	

□	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	
c	c	c	a

□	a	b	c
a	b	c	a
b	c		b
c	a	b	c

Operace určené tabulkami splňují zadání, jejích vlastnosti tedy jsou: **~~ND~~ ∧ ~~A~~ ∧ ~~K~~ ∧ <u>EN</u> ∧ <u>EI</u> ∧ ~~ZR~~**

(M, □) je algebraická struktura

Řešení:

b) A ∧ ~~ZR~~

Řešení mohou být následující

□	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

□	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

□	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

Operace určené všemi třemi tabulkami splňují podmínky zadání, jejich vlastnosti tedy jsou: <u>**ND**</u> ∧ <u>**A**</u> ∧ <u>**K**</u> ∧ ~~**EN**~~ ∧ ~~**EI**~~ ∧ ~~**ZR**~~

(M, □) je komutativní pologrupa

Řešení:

b) A $\wedge$ ~~**ZR**~~

Řešení mohou být následující

□	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

□	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Operace určené oběmi tabulkami splňují podmínky zadání, jejich vlastnosti tedy jsou: **ND** $\wedge$ **A** $\wedge$ **K** $\wedge$ **EN** $\wedge$ ~~**EI**~~ $\wedge$ ~~**ZR**~~

(M, □) je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem