**Vlastnosti binárních operací:**

*Definice :*Binární operace **○** v množině M, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici [*x,y*] $\in $ M x M, se nazývá operace **neomezeně definovaná** v množině M (zkráceně operace **definovaná** **na** množině M). Značíme **ND**.

 Symbolicky: (∀*x, y* $\in $ M)(∃ *z* $\in $ M)[ *x* ***○*** *y = z*].

*Definice:*Binární operace **○** definovaná na množině M (je ND), se nazývá **komutativní** právě tehdy, když platí:

 (∀ *x, y* $\in $ M)[ *x* ***○*** *y = y* ***○*** *x*].

Značíme **K**.

*Definice:*Binární operace **○** definovaná na množině M, se nazývá **asociativní** právě tehdy, když platí:

 (∀ *x, y, z* $\in $ M)[ (*x* ***○*** *y*) **○** *z* = *x* **○** (*y* ***○*** *z*)].

Značíme **A**.

*Definice:*Nechť v množině M je definována binární operace **○**. Existuje-li prvek *e* $\in $ M, pro který platí:

 (∀*x* $\in $ M)[ *x* ***○*** *e = e* ***○*** *x = x*].

Pak se prvek *e* $\in $ M nazývá **neutrálním prvkem** množiny M vzhledem k operaci **○.**

Značíme **EN**.

*Poznámka*. Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EN** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti *x* ***○*** *e* nebo *e* ***○*** *x.*

*Definice :*Nechť v množině M je definována binární operace **○** a nechť *e* je neutrální prvek množiny M vzhledem k operaci **○**. Prvek *ā* $\in $ M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku *a* $\in $ M v operaci **○** v množině M právě tehdy, když platí:

 *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e.*

Jestliže (∀*a* $\in $ M)(∃ *ā* $\in $ M)[ *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā = e*], řekneme, že ke každému prvku množiny M existuje prvek inverzní vzhledem k operaci **○**. Značíme **EI**.

*Poznámka* . Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **EI** lze vynechat jedna ze dvou stran rovnosti *ā* ***○*** *a = a* ***○*** *ā.*

*Definice :* Říkáme, že binární operace **○** definovaná na množině M má vlastnost **řešitelnost základních rovnic** právě tehdy, když platí:

 (∀*a, b* $\in $ M) )(∃ *x, y* $\in $ M)[ *a* ***○*** *x = b* *y* ***○*** *a = b*].

Značíme **ZR**.

*Poznámka*. Je-li operace **○** komutativní, pak v zápisu vlastnosti **ZR** lze vynechat jedna z výrokových forem *a* ***○*** *x = b* nebo *y ○ a = b.*

*Definice:*Nechť v množině M je definována binární operace **○**. Existuje-li prvek *g* $\in $ M, pro který platí:

 (∀*x* $\in $ M)[ *x* ***○*** *g = g* ***○*** *x = g*].

Pak se prvek *g* nazývá **agresivním** prvkem množiny M vzhledem k operaci **○**.

**Určování vlastností operací**

I. **Určených předpisem** – přímým výpočtem

II. **Určených tabulkou**:

ND – tabulka zcela vyplněna prvky množiny M

K – tabulka souměrná podle hlavní diagonály

A – kromě výjimek nelze z tabulky přímo poznat – viz dále

EN – existuje řádek a sloupec shodný se záhlavím tabulky

EI – v každém řádku a každém sloupci tabulky je neutrální prvek

ZR – v každém řádku i sloupci tabulky jsou všechny prvky množiny M

**Agresivní prvek** *g* $\in $ M poznáme tak, že v celém jemu příslušejícím řádku i sloupci se vyskytuje pouze prvek *g*.

Užitečné vztahy: K  ND, A  ND, EI  EN (užívají se v obměněném tvaru)

 A  (EI  ZR)

*Určování asociativnosti z tabulek*:

1. Pohledem (velmi zřídka)

2. Ověřením všech možných trojic prvků (s využitím cvičení 9 – 13 v učebnici, s. 123 – 124) (těžkopádné a zdlouhavé)

3. Využitím obměny implikace A  ND a implikace A  (EI  ZR)

4. Podle tvrzení: „ Operace, která splňuje EN  EI  ZR a současně není asociativní, existuje na množině o nejméně pěti prvcích“.

*Užití na příkladech*:

|  |  |
| --- | --- |
| o |  a b c  |
| abc |  a a a a a a a a a  |

ad 1. Např.

ad 3. Nejčastější případ – rozbor implikace A  (EI  ZR). Je-li u EI a ZR rozdílná pravdivostní hodnota, pak operace není asociativní. Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 1, pak postupujeme podle bodu 4 (v písemných pracích jsou zadávány tabulky o maximálně čtyřech prvcích). Jsou-li u EI a ZR pravdivostní hodnoty 0, pak je nutno postupovat podle bodu 1 nebo 2. Zpravidla jde o bod 1, kdy určíme asociativnost přímo z tabulky.

|  |  |
| --- | --- |
| o |  a b c  |
| abc |  a b c b c a c a b  |

Má všechny vlastnosti.

**Př**: Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M =  operace určená tabulkou:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ⁕ | a | b | c |  |  | ○ | a | b | c |  |  | □ | a | b | c |  |  | ■ | a | b | c |  |
|  | a |  | a | b |  |  | a | b | a | c |  |  | a | c | a | a |  |  | a | a | b | c |  |
|  | b | a | b | c |  |  | b | c | b | a |  |  | b |  | c | b |  |  | b | b | a | c |  |
|  | c | b | c | b |  |  | c | a | c | b |  |  | c | a | b | c |  |  | c | c | b | a |  |

⁕: ~~ND~~  ~~K~~  ~~A~~   EN  EI ∧ ~~ZR~~

○: ND  ~~K~~  ~~A~~  ~~EN~~  ~~EI~~ ∧ ZR

□: ~~ND~~  ~~K~~  ~~A~~  EN  EI  ~~ZR~~

■: ND  ~~K~~  ~~A~~   EN  EI  ~~ZR~~

**Př**: V množině M =  definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:

 a) K  ~~EN~~ b) ND ~~K~~  EN c) ND EN~~EI~~ d) A  ~~ZR~~

 e) ~~K~~  EN ~~EI~~ f) EI  ZR g) ND  ~~A~~  EI  ~~ZR~~ h) ~~A~~  EN  EI ∧ ZR

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a) | a | b | c |  |  | b) | a | b | c |  |  | c) | a | b | c |  |  | d) | a | b | c |  |
|  | a | c | a | b |  |  | a | b | a | a |  |  | a | b | a | a |  |  | a | a | a | a |  |
|  | b | a | c | c |  |  | b | c | b | b |  |  | b | a | c | b |  |  | b | a | a | a |  |
|  | c | b | c | b |  |  | c | a | b | c |  |  | c | a | b | c |  |  | c | a | a | a |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | e) | a | b | c |  |  | f) | a | b | c |  |  | g) | a | b | c |  |  | Nemá |  |  |  |  |
|  | a |  | a | b |  |  | a | a | b | c |  |  | a | c | a | a |  |  | řešení |  |  |  |  |
|  | b | a | b | c |  |  | b | b | c | a |  |  | b | a | c | b |  |  |  |  |  |  |  |
|  | c | c | c | a |  |  | c | c | a | b |  |  | c | a | b | c |  |  |  |  |  |  |  |