Možnosti distanční výuky

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Vlastnosti binárních operací II.

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDR. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
Mgr. Petra Bušková

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 4

- *Definice 6*: Nechť je v množině M (!) definována binární operace ○ a nechť existuje prvek $e \in$ M, který je neutrálním prvkem množiny M vzhledem k operaci ○. Prvek $\bar{x} \in$ M nazýváme **inverzním prvkem** k prvku $x \in$ M v operaci ○ v množině M právě tehdy, když platí:

$$x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e$$

Jestliže ke každému prvku $x \in$ M existuje vzhledem k operaci ○ prvek inverzní $\bar{x} \in$ M, hovoříme o vlastnosti existence inverzního prvku ke každému prvku množiny M vzhledem k operaci ○. Značíme **EI**.

symbolicky: $(\forall\, x \in \mathrm{M})(\exists\, \bar{x} \in \mathrm{M})[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

- *Příklad 6:*
  - operace sčítání (**+**)…na množině $\mathbb{N}_0$ nemá vlastnost **EI** (neexistuje ke každému číslu $x \in \mathbb{N}_0$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{N}_0$, aby platilo $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 0$, tj. neexistuje ke každému číslu z množiny $\mathbb{N}_0$ prvek inverzní). ✗
    - **např:** pro $x = 3$: $3 + \bar{x} = \bar{x} + 3 = 0$ $\bar{x} = -3$, ale $-3 \notin \mathbb{N}_0$

EI: symbolicky: $\boxed{(\forall\, x \in M)(\exists\, \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]}$

- *Příklad 6:*
  - operace sčítání (**+**)...na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ má vlastnost **EI** (existuje např. ke každému celému číslu $x \in \mathbb{C}$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{C}$, aby platilo $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 0$. Toto číslo nazýváme **číslem opačným** a značíme $\bar{x} = -x$). ✓

  Vzhledem k operaci sčítání:
    - k číslu $2 \in \mathbb{C}$ je opačným číslem číslo $-2 \in \mathbb{C}$, tuto skutečnost zapíšeme $\bar{2} = -2$, neboť platí: $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ (0 je neutrální prvek množiny $\mathbb{C}$ vzhledem ke sčítání)
    - k číslu $-2 \in \mathbb{C}$ je opačným číslem číslo $2 \in \mathbb{C}$, tuto skutečnost zapíšeme $\overline{-2} = 2$,
    - k číslu $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ je opačným číslem číslo $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, neboť platí: $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 0$ (0 je neutrální prvek množiny $\mathbb{Q}$ vzhledem ke sčítání)
    - k číslu $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ je opačným číslem číslo $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, neboť platí $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$ (0 je neutrální prvek množiny $\mathbb{R}$ vzhledem ke sčítání)
  - operace odčítání (**-**)....na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nemá vlastnost **EI** (neboť vzhledem k této operaci uvedené množiny nemají neutrální prvek). ✗

EI: symbolicky: $\boxed{(\forall\, x \in M)(\exists\, \bar{x} \in M)[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]}$

- operace násobení (•)...na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nemá vlastnost **EI** (neexistuje např. ke každému celému číslu $x \in \mathbb{N}$ takové číslo $\bar{x} \in \mathbb{N}$, aby platilo $x \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet x = 1$). X

Vzhledem k operaci násobení:

- k číslu $2 \in \mathbb{N}$ neexistuje $\bar{x} \in \mathbb{N}$ takové, aby platilo $2 \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet 2 = 1$ (1 je neutrální prvek množiny $\mathbb{N}$ vzhledem k násobení)

  např: pro $x = 2$: $2 \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet 2 = 1$ $\quad \bar{x} = \frac{1}{2}$, *ale* $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

- k číslu $2 \in \mathbb{Q}$ existuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ takové, aby platilo $2 \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet 2 = 1$ ($\bar{x} = \frac{1}{2}$, kde $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$),
- k číslu $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ existuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ takové, aby platilo $\frac{1}{2} \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet \frac{1}{2} = 1$ ($\bar{x} = 2$, kde $2 \in \mathbb{Q}$), ale
- k číslu $0 \in \mathbb{Q}$ neexistuje $\bar{x} \in \mathbb{Q}$, takové, aby platilo $0 \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet 0 = 1$ (Právě pouze kvůli číslu 0, které jediné nemá v množině $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ inverzní prvek vzhledem k násobení, nemá operace násobení vlastnost EI)

EI: symbolicky: $(\forall\, x \in \mathrm{M})(\exists\, \bar{x} \in \mathrm{M})[x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

- *Příklad 6:*
  - operace násobení (•)… $\mathbb{Q}$ - {0}, $\mathbb{R}$ - {0} <u>má</u> vlastnost **EI**, tj. ke každému nenulovému racionálnímu či reálnému číslu x existuje inverzní prvek $\bar{x}$ vzhledem k násobení takový, že platí: $x \bullet \bar{x} = \bar{x} \bullet x = 1$.

Toto číslo nazýváme **číslem převráceným** a značíme $\bar{x} = \frac{1}{x}$.

Vzhledem k operaci násobení na množině $\mathbb{Q}$ - {0} nebo $\mathbb{R}$ - {0} :

- k číslu 3 $\in \mathbb{Q}$ - {0} je převráceným číslem číslo $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ - {0} , tuto skutečnost zapíšeme

$\bar{3} = \frac{1}{3}$, neboť platí: $3 \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \bullet 3 = 1$ (1 je neutrální prvek množiny $\mathbb{Q}$ - {0} vzhledem k násobení)

- k číslu $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ - {0} je převráceným číslem číslo $-3 \in \mathbb{Q}$ - {0}, neboť platí:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \bullet (-3) = (-3) \bullet \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

- *Definice 7*: Říkáme, že binární operace ○ definovaná na množině M (je ND) má vlastnost **řešitelnosti základních rovnic** právě tehdy, když platí

$$\boxed{(\forall\, a, \mathrm{b} \in \mathrm{M})(\exists\, x, \mathrm{y} \in \mathrm{M})[a \circ x = \mathrm{b} \wedge \mathrm{y} \circ a = \mathrm{b}]}$$

Značíme **ZR**.

Poznámka 1: Jestliže je operace ○ komutativní (**K**), pak lze rovnice uvedené v definici zredukovat na jediný tvar, tj.

$$\boxed{(\forall\, a, b \in \mathrm{M})(\exists\, x \in \mathrm{M})[a \circ x = \mathrm{b}]}$$

- *Příklad 7:*
  - operace sčítání (**+**)…na množině $\mathbb{N}$ <u>není</u> **ZR** $(\forall\, a, \mathrm{b} \in \mathbb{N})(\exists\, \mathrm{x} \in \mathbb{N})[a + \mathrm{x} = \mathrm{b}]$ (např. pro a = 4, b = 3 nemá rovnice 4 + x = 3 řešení na množině $\mathbb{N}$) ✗
  - operace sčítání (**+**)…na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ <u>je</u> **ZR** $(\forall\, a, \mathrm{b} \in \mathbb{C})(\exists\, \mathrm{x} \in \mathbb{C})[a + \mathrm{x} = \mathrm{b}]$ ✓
  - operace násobení (•)…na množině $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ <u>není</u> **ZR** $(\forall\, a, \mathrm{b} \in \mathbb{N})(\exists\, \mathrm{x} \in \mathbb{N})[a \bullet \mathrm{x} = \mathrm{b}]$ ✗
    (např. pro a = 4, b = 3 nemá rovnice 4 • x = 3 řešení na množině $\mathbb{N}$)
    (např. pro a = 0, b = 3 nemá rovnice 0 • x = 3 řešení na množině $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
  - operace násobení (•)…na množině $\mathbb{Q}$ - {0}, $\mathbb{R}$ - {0} <u>je</u> **ZR** ✓
    $(\forall\, a, \mathrm{b} \in \mathbb{Q} - \{0\})(\exists\, \mathrm{x} \in \mathbb{Q} - \{0\})[a \bullet \mathrm{x} = \mathrm{b}]$