Algebraické struktury

Základy algebry a aritmetiky – předmět IMAp02 (jaro 2020)

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Prezentace č. 5

Algebraické struktury s jednou operací

V předchozích prezentacích jste se seznámili s vlastnostmi operací v množině.

- Neomezeně definovaná operace v množině M **ND**
- Komutativní operace na množině M **K**
- Asociativní operace na množině M **A**
- Existence neutrálního prvku v množině M vzhledem k operaci **EN**
- Existence inverzního prvku pro každý prvek množiny M vzhledem k operaci **EI**
- Řešitelnost základních rovnic na množině M s operací **ZR**

MUNI

Dodatek k minulé prezentaci

Agresivní prvek je pomyslným protikladem prvku neutrálního. Zatímco neutrální prvek nedokáže „změnit“ žádný prvek, jestliže s ním provedeme operaci, agresivní prvek vytvoří po operaci s jakýmkoli prvkem opět sám sebe.

Symbolicky:

Neutrální prvek (značíme e) - $\forall\, a \in M$: $e \circ a = a \circ e = a$

Agresivní prvek (značíme g) - $\forall\, a \in M$: $g \circ a = a \circ g = g$

Algebraické struktury s jednou operací

V této prezentaci se budeme věnovat pouze speciálnímu pojmenování množin s operací, která na nich splňuje určité vlastnosti.

Definice 1:
Uspořádaná dvojice (M, o), kde M je neprázdná množina, ve které je definována binární operace o, se nazývá **algebraická struktura s jednou operací.**

Příklad 1:
Promyslete si, jaké vlastnosti má známá operace sčítání na přirozených číslech, jinak řečeno algebraická struktura (**N**, +).

Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 1:
Promyslete si, jaké vlastnosti má známá operace sčítání na přirozených číslech, jinak řečeno algebraická struktura (**N**, +).

Řešení:

- Jestliže $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, pak určitě i $a+b \in \mathbf{N}$ → platí **ND**
- Platí $a+b=b+a$ pro všechna $a, b \in \mathbf{N}$ → platí **K**
- Platí $a+(b+c)=(a+b)+c$ pro všechna $a, b, c \in \mathbf{N}$ → platí **A**
- Pro každé $a \in \mathbf{N}$ platí $a+0=a$, tedy neutrální prvek $e=0$. Avšak 0 nepatří mezi přirozená čísla → neplatí **EN**
- Neexistuje neutrální prvek → neplatí **EI**
- Například pro dvojici čísel 5, 7 nemůžeme najít čísla $x, y \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $7+x=5$ a zároveň $y+7=5$ → neplatí **ZR**

Algebraické struktury s jednou operací

Nyní si můžeme nazvat jednotlivé typy algebraických struktur v závislosti na vlastnostech na nich definovaných operací. Pokud nesplňuje (M, o) ani vlastnost ND, nazýváme ji pouze algebraickou strukturou.

Definice 2 - 7:
Algebraická struktura (M, o) se nazývá _______ právě tehdy, když splňuje operace o definovaná na M vlastnosti _______.

	ND	A	EN	EI	K
GRUPOID					
POLOGRUPA					
GRUPA					
KOMUTATIVNÍ GRUPOID					
KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA					
KOMUTATIVNÍ GRUPA					

Algebraické struktury s jednou operací

Jinak řečeno …

Definice 2:
Algebraická struktura (M, o) se nazývá **grupoid** právě tehdy, když je operace o neomezeně definovaná v M (tj. definovaná na M).

Definice 3:
Grupoid (M, o), jehož operace je asociativní, se nazývá **pologrupa**.

Definice 4:
Pologrupa (M, o) taková, že v M existuje neutrální prvek vzhledem k operaci o a ke každému $x \in$ M existuje v M inverzní prvek, se nazývá **grupa**.

Jestliže je operace o v množině M navíc komutativní, pak k názvu algebraické struktury přidáme přívlastek „komutativní", tedy komutativní grupoid, komutativní pologrupa, případně komutativní grupa.

MUNI

Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 2:

Určete typ algebraické struktury

a) $(\mathbf{N}, +)$

b) $(\mathbf{Z}, +)$

c) $(\mathbf{R}, \cdot)$

d) $(\mathbf{R} - \{0\}, \cdot)$

e) $(\mathbf{Z}, :)$

Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 2:

Určete typ algebraické struktury

Řešení:

a) (**N**, +) splňuje vlastnosti ND, K, A → **komutativní pologrupa**
b) (**Z**, +) splňuje vlastnosti ND, K, A, EN, EI → **komutativní grupa**
c) (**R**, ·) splňuje vlastnosti ND, K, A, EN → **komutativní pologrupa**
d) (**R** – {0}, ·) splňuje vlastnosti ND, K, A, EN, EI → **komutativní grupa**
e) (**Z**, :) nesplňuje ani vlastnost ND → **algebraická struktura**

Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 3:

Určete typ algebraické struktury, $P(A)$ je systém podmnožin množiny $A=\{1,2,3\}$.

a) $(P(A), \cap)$

b) $(P(A), \cup)$

Algebraické struktury s jednou operací

Příklad 3:

Určete typ algebraické struktury, P(A) je systém podmnožin množiny A={1,2,3}.
(P(A)={∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}})

Řešení:

a) Průnik libovolných dvou množin z P(A) je opět prvek P(A), dále je průnik množin obecně komutativní i asociativní. Neutrálním prvkem je celá množina A, avšak například prvek {1,2} nemá prvek inverzní, pro který by platilo {1,2} ∩ ___={1,2,3}. Celkem platí ND, K, A, EN → **komutativní pologrupa**

b) Podobně platí i pro sjednocení ND, K, A. Neutrálním prvkem ve sjednocení množin je množina prázdná, opět je problém s prvky inverzními. Například pro prvek {2,3} nenajdeme žádný inverzní prvek, pro který má platit {2,3} ∪ ___= ∅. Dohromady platí ND, K, A, EN → **komutativní pologrupa**

Děkuji za pozornost ☺

Pokud jste něco nepochopili, ráda Vás uvidím na konzultaci v aplikaci Microsoft Teams v úterý 31.3. ve 13 hodin.