

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Operace dané předpisem

Základy algebry a aritmetiky – předmět
IMAp02 (jaro 2020)

Prezentace č. 8

Operace dané předpisem

- V předchozích prezentacích jste pracovali s operacemi zadanými pomocí tabulky, určovali jste vlastnosti těchto operací na množině a následně i typ algebraické struktury.
- To stejné Vás čeká i v této prezentaci, ale operace budou zadané určitým předpisem, například $x * y = 2xy - 3$.
- U operace na množině vždy určíme, zda platí vlastnosti **ND** (neomezeně definovaná operace), **K** (komutativita), **A** (asociativita), **EN** (existence neutrálního prvku), **EI** (existence inverzního prvku pro každý prvek množiny) a **ZR** (řešitelnost základních rovnic).
- Na základě vlastností algebraické struktury $(M, *)$, kde $*$ je operace definovaná na neprázdné množině M , určíme její typ: grupoid, pologrupa, grupa, komutativní grupoid, komutativní pologrupa, komutativní grupa.



Příklad 1:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace \circ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla, sami si můžete značit \mathbf{Z} , prezentace se opírají o značení ve studijním materiálu). Určete typ algebraické struktury (\mathbf{C}, \circ) .

$$\circ = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = x + y + 1\}$$

Poznámka:

$\circ = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = x + y + 1\}$ lze také zapisovat

$\circ = \{[x, y, z] \in \mathbf{C}^3 : z = x + y + 1\}$, případně zkráceně $xoy = x + y + 1$.



Příklad 1:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (\mathbf{C}, o) .

$$o = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = x + y + 1\}$$

Řešení:

Postupně budeme určovat platnost jednotlivých vlastností, budeme se přitom opírat o známé vlastnosti sčítání.

- Operace o je jistě ND, protože pokud sečteme jakákoli dvě celá čísla a k součtu přičteme 1, výsledkem bude opět celé číslo. Zapsáno symbolicky:
 $\forall x, y \in \mathbf{C} : x + y + 1 \in \mathbf{C}$
- Ptáme se, jestli $\forall x, y \in \mathbf{C} : xoy = yox$. Tedy zda $x + y + 1 = y + x + 1$. Protože ale víme, že sčítání je komutativní, můžeme říci, že daná rovnost platí. Operace o je na množině \mathbf{C} komutativní.
- Pro ověření asociativity musíme zjistit, zda $\forall x, y, z \in \mathbf{C} : xo(yoz) = (xoy)oz$. Tuto vlastnost si musíme ověřit rozepsáním.
 $xo(yoz) = xo(y + z + 1) = x + y + z + 1 + 1 = x + y + z + 2$
 $(xoy)oz = (x + y + 1)oz = x + y + 1 + z + 1 = x + y + z + 2$
Vidíme, že zadaná operace je na celých číslech asociativní.



Příklad 1:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace \circ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (\mathbf{C}, \circ) .

$$\circ = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = x + y + 1\}$$

Řešení:

Už víme, že je operace \circ na celých číslech ND, K a A. Ověřujeme další vlastnosti.

- Abychom dokázali existenci neutrálního prvku, musíme ho najít. Pro neutrální prvek e platí: $\forall x \in \mathbf{C} : e \circ x = x \circ e = x$. Nám stačí ověřit pouze jednu rovnost, protože víme, že operace \circ je komutativní. Vezměme si rovnost $x \circ e = x$ a rozepíšeme operaci $x + e + 1 = x$. Z této rovnosti plyne $e = -1$, tato hodnota patří do \mathbf{C} , a tak jsme našli neutrální prvek.
- Připomeňme si inverzní prvky – $(\forall x \in \mathbf{C})(\exists \bar{x} \in \mathbf{C}) : x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e$. Opět nám díky komutativitě stačí pouze jedna rovnost, v níž rozepíšeme operaci a dostáváme $x + \bar{x} + 1 = -1$. Po úpravě dostáváme $\bar{x} = -2 - x$, což je pro každé celé číslo x opět celé číslo. Ke každému prvku tedy existuje v \mathbf{C} prvek inverzní.
- Zbývá ověřit vlastnost ZR. Tato vlastnost říká, že $(\forall a, b \in \mathbf{C})(\exists x, y \in \mathbf{C}) : a \circ x = b \wedge y \circ a = b$. Po rozepsání operací dostáváme $a + x + 1 = b$, $y + a + 1 = b$. Jistě pro každá celá čísla a, b taková celá čísla x, y můžeme nalézt, vlastnost ZR tedy platí.

Příklad 1:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace o definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury (\mathbf{C}, o) .

$$o = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = x + y + 1\}$$

Řešení:

Zjistili jsme, že operace o na celých číslech má všechny uvedené vlastnosti. Algebraická struktura (\mathbf{C}, o) je komutativní grupa.



Příklad 2:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{C}, *)$.

$$* = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = 2x + 2y\}$$



Příklad 2:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{C}, *)$.

$$* = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = 2x + 2y\}$$

Řešení:

- Operace je ND, protože $\forall x, y \in \mathbf{C} : 2x + 2y \in \mathbf{Z}$.
- Operace je K, protože $\forall x, y \in \mathbf{C} : 2x + 2y = 2y + 2x$, tedy $x * y = y * x$.
- Ověřme asociativitu:
 $x * (y * z) = x * (2y + 2z) = 2x + 2(2y + 2z) = 2x + 4y + 4z$
 $(x * y) * z = (2x + 2y) * z = 2(2x + 2y) + 2z = 4x + 4y + 4z$
Protože $x * (y * z)$ se nerovná $(x * y) * z$, operace nemá vlastnost A.
- Hledejme neutrální prvek: $\forall x \in \mathbf{C} : x * e = e * x = x$, díky K stačí ověřit jednu rovnost: $2x + 2e = x$. Z rovnosti plyne, že je neutrální prvek závislý na hodnotě x , neutrální prvek ale musí být stejný pro všechna celá čísla, proto vůbec neexistuje. Operace $*$ nemá vlastnost EN.

Příklad 2:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{C}, *)$.

$$* = \{[(x, y), z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = 2x + 2y\}$$

Řešení:

Již víme, že má operace $*$ na celých číslech vlastnosti ND, K, naopak nemá vlastnosti A, EN. Ověřme zbývající vlastnosti EI, ZR.

- Pokud neexistuje neutrální prvek, nemohou existovat ani prvky inverzní. Operace $*$ nesplňuje vlastnost EI.
- Vlastnost ZR říká, že $(\forall a, b \in \mathbf{C})(\exists x, y \in \mathbf{C}) : a * x = b \wedge y * a = b$. Po rozepsání operací dostáváme $2a + 2x = b$, $2y + 2a = b$. Pokud zvolíme například $a = 3$, $b = 1$, nedokážeme nalézt čísla x , y splňující dané rovnosti, neexistuje celé x takové, aby $6 + 2x = 1$. Operace $*$ nesplňuje vlastnost ZR.

Operace $*$ má na množině \mathbf{C} vlastnosti ND a K, nemá vlastnosti A, EN, EI a ZR. Algebraická struktura $(\mathbf{C}, *)$ je komutativní grupoid.

Příklad 3:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{Q} (racionální čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{Q}, *)$.

$$* = \{[(x,y),z] \in \mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q} : z = \frac{x+y}{2}\}$$

Příklad 4:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{C} (celá čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{C}, *)$.

$$* = \{[(x,y),z] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C} : z = y\} \quad (\text{neboli } x * y = y)$$

Příklad 5:

Zjistěte a zdůvodněte, které z vlastností ND, K, A, EN, EI, ZR má operace $*$ definovaná na množině \mathbf{N} (přirozená čísla). Určete typ algebraické struktury $(\mathbf{N}, *)$.

$$* = \{[(x,y),z] \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{N} : z = x^y\}$$

Řešení:

Příklad 3 – má vlastnosti ND, K, ZR,
algebraická struktura je komutativní grupoid

Příklad 4 – má vlastnosti ND, A,
algebraická struktura je pologrupa

Příklad 5 – má vlastnost ND,
algebraická struktura je grupoid

Děkuji za pozornost 😊

Pokud potřebujete s některým příkladem pomoci, rádi Vás uvidíme na konzultaci v aplikaci Microsoft Teams v úterý 28.4. ve 13 hodin.

Další řešené příklady naleznete v pdf souboru operace_predpis.