

# IMAp09 Didaktika matematiky

## P 5 pokračování

### Geometrie v učivu matematiky 1. stupně ZŠ - Geometrická zobrazení

Růžena Blažková

#### Geometrická zobrazení

V geometrii se setkáváme s úlohami, ve kterých je nějakému bodu nebo nějakému geometrickému útvaru přiřazen jiný bod nebo jiný geometrický útvar, který zpravidla splňuje jisté podmínky. Toto přiřazení nazýváme geometrickým zobrazením a může se realizovat v rovině nebo i v prostoru. Budeme se zabývat geometrickými zobrazeními v rovině. Geometrická zobrazení klasifikujeme takto:

#### Geometrická zobrazení

shodná		neshodná	
přímo shodná	nepřímo shodná	podobná	nepodobná
identita	osová souměrnost	podobnost	
rotace		stejnolehlost	
translace			

#### Shodná zobrazení

Zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny (prostoru) přiřazuje bod  $X'$  téže roviny se nazývá **shodné zobrazení**, právě když pro libovolné dva body  $X, Y$  této roviny platí:  $XY \cong X'Y'$ .

Body  $X, Y$  nazýváme vzory, body  $X', Y'$  jsou obrazy bodů  $X, Y$ .

Každé shodné zobrazení je prosté zobrazení roviny na sebe.

Obrazem  $U'$  geometrického útvaru  $U$  nazýváme množinu obrazů všech bodů útvaru  $U$ . Jestliže platí  $U = U'$ , nazýváme útvar  $U$  **samodružným útvarem** v daném zobrazení.

Bod, který se zobrazí sám na sebe, se nazývá **samodružný bod** v daném zobrazení.

Připomeňte, že ve shodném zobrazení je obrazem úsečky  $AB$  úsečka  $A'B'$ , která je shodná s úsečkou  $AB$ ; obrazem polopřímky  $PM$  polopřímka  $P'M'$ ; obrazem úhlu  $AVB$  úhel  $A'V'B'$ , který je shodný s úhlem  $AVB$ ; obrazy rovnoběžných přímek jsou přímky rovnoběžné.

## **Druhy shodných zobrazení v rovině:**

### **Identita**

je shodné zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz tentýž bod,  $X = X'$

### **Rotace - otočení**

(je určeno bodem  $S$  a orientovaným úhlem otáčení  $\alpha$ )

je to shodné zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz bod  $X'$  podle následujícího pravidla:

a) jestliže bod  $X \neq S$ , pak orientovaný úhel  $XSX'$  je shodný s orientovaným úhlem  $\alpha$  a úsečky  $XS$  a  $X'S$  jsou shodné.

b) jestliže bod  $X = S$ , pak  $X' = X$ .

Zvláštním případem otáčení je středová souměrnost.

### **Středová souměrnost**

(je určena bodem  $S$  – středem souměrnosti)

je shodné zobrazení v rovině, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz bod  $X'$  podle následujícího pravidla:

a) jestliže bod  $X \neq S$ , pak  $S$  je středem úsečky  $XX'$

b) jestliže bod  $X = S$ , pak  $X' = X$ .

### **Translace - posunutí**

(je určeno uspořádanou dvojicí bodů  $AA'$ )

je shodné zobrazení, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz bod  $X'$  tak, že úsečka  $XX'$  je shodná s úsečkou  $AA'$  a polopřímky  $XX'$  a  $AA'$  jsou "souhlasně rovnoběžné".

### Osová souměrnost

(je určena přímkou  $o$  – osou souměrnosti)

je shodné zobrazení v rovině, které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz bod  $X'$  podle následujícího pravidla:

a) jestliže bod  $X$  je bodem přímky  $o$ , pak  $X' = X$ .

b) jestliže bod  $X$  neleží na přímce  $o$ , pak  $XX' \perp o$  a  $|X', o| = |X, o|$ .

### Podobná zobrazení

Podobná geometrická zobrazení jsou charakterizována existencí reálného čísla  $k > 0$ , které pro každé dvojice vzoru  $(X, X')$  a obrazu  $(Y, Y')$  splňuje vztah  $|XY'| = k \cdot |XY|$ .

Ve školské matematice na prvním stupni se nejčastěji setkáváme s osovou souměrností.

### Osová souměrnost

**Osová souměrnost** je shodné zobrazení v rovině, které je určeno přímkou  $o$ , osou souměrnosti a které každému bodu  $X$  roviny přiřazuje jako obraz bod  $X'$  podle následujícího pravidla:

a) jestliže bod  $X$  je bodem přímky  $o$ , pak  $X' = X$ .

b) jestliže bod  $X$  neleží na přímce  $o$ , pak  $XX' \perp o$  a  $|X', o| = |X, o|$ .

Jestliže bod  $X$  leží na ose  $o$ , nazývá se samodružný. Na obrázcích ilustrujeme, že osová souměrnost je nepřímo shodné zobrazení.

Žáci nejprve dokreslují obrázky ve čtvercové síti s vyznačenou osou souměrnosti a zakreslenou jednu polovinu obrázku. Pokud je osa svislá, zpravidla nemají problémy. Pokud je osa vodorovná, někteří žáci obrázek posunou. Pokud osa prochází body čtvercové sítě a není na přímkách sítě, je pro některé žáky nakreslení osově souměrného útvaru náročné.

Další aktivitou je práce s papírem. Žáci přeloží list papíru, přehyb označí jako osu souměrnosti, špendlíkem propíchnou tři různé body. Papír rozloží a pozorují, co platí pro vzory a obrazy jednotlivých bodů. Leží na přímce, která je kolmá k ose a vzdálenost vzoru a obrazu od osy je stejná. Pozorují obraz úsečky v osově souměrnosti (případně přímky) a obraz trojúhelníku. Tato aktivita je vhodná ve 4. nebo v 5. ročníku, až jsou žáci seznámeni s potřebnými pojmy.

Žáci se seznamují s osově souměrnými útvary. Připomeňme, že geometrický útvar  $U$  nazýváme **osově souměrný**, právě když se v nějaké osově souměrnosti zobrazí sám na sebe (tzn. že je v tomto zobrazení samodružný). Útvary osově souměrné a počet os souměrnosti daného útvaru poznávají žáci konkrétními aktivitami. Obdrží čtverce, obdélníky, trojúhelníky, kruhy a další mnohoúhelníky vystřižené z papíru a překládáním zjišťují, zda jsou osově souměrné, případně zda mohou najít více os souměrnosti daného útvaru. Zjišťují tak, že čtverec je souměrný podle čtyř os souměrnosti, obdélník podle dvou os souměrnosti, kruh má nekonečně mnoho os souměrnosti, trojúhelník rovnostranný má tři osy souměrnosti, trojúhelník rovnostranný jednu osu, trojúhelník různoramenný není osově souměrný, Pravidelné mnohoúhelníky, které mají  $n$  stran mají  $n$  os souměrnosti. Vyhledávají osově souměrná písmena velké abecedy kolmého písma, osově souměrné číslice apod. Další činností je vystřihování osově souměrných útvarů (srdíčka, květiny, stromečky aj.). Žáci se učí rýsovat osu úsečky.

Osově souměrné útvary pozorují i v praxi, např. vyhledávají dopravní značky, které jsou osově souměrné, portály chrámů, ornamenty apod. osová souměrnost je využívána např. krejčími při stříhání látek na oděvy, v technické praxi, architektuře, umění.

## Posunutí

S posunutím se žáci setkávají již v prvním ročníku, kdy píšou tzv. „šikmé čárky“, obloučky apod. podle vzoru, který je předepsán v písance. Ideální stav je, když všechny objekty jsou stejně velké, vzdálenosti mezi nimi jsou stejné a příslušné úsečky jsou rovnoběžné.

Na závěr připomeňme, že dva geometrické útvary  $U_1, U_2$  nazýváme **shodné**, právě když existuje takové shodné zobrazení, v němž je obrazem útvaru  $U_1$  útvar  $U_2$ . Ve školské matematice říkáme, že dva útvary jsou shodné, když je můžeme přemístit tak, aby se kryly. Shodné útvary mají stejný tvar i stejnou velikost.

## **Podobnost**

Dva geometrické útvary jsou podobné, jestliže poměry délek všech dvojic odpovídajících si úseček jsou rovny témuž číslu  $k > 0$  a odpovídající si úhly jsou shodné.

Podobné útvary mají stejný tvar a různou velikost. Představa o podobných útvarech je ve školské matematice spojována se zvětšováním či zmenšováním útvarů v daném poměru.

Aktivity:

Žáci mají nakreslený útvar ve čtvercové síti s daným modulem a mají nakreslit tentýž útvar ve čtvercoví síti, která má modul např. dvojnásobný.

Žáci pozorují mapy s různými měřítky.

Žáci zmenšují či zvětšují fotografie získané např. na mobilním telefonu.

Žáci mohou pozorovat zvětšování či zmenšování textu a obrázků na kopírce.

