

Kongruence, rozklad na zbytkové třídy

Věta: Necht' a, b jsou celá čísla taková, že $b \neq 0$. Potom existují celá čísla q, r splňující vztah: $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$, přičemž toto vyjádření je jednoznačné.

Poznámka: V předchozí větě a je dělenec, b je dělitel, q je neúplný podíl a r je zbytek. Je nutno si uvědomit, že zbytek r při dělení je vždy nezáporný, a to i v případě dělení záporným číslem. Např. $a = -26, b = -8, q = 4, r = 6$, protože $-26 = (-8) \cdot 4 + 6$.

Definice: Necht' $a, b \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{N}, m \geq 2$. Pak řekneme, že číslo a je kongruentní s číslem b podle modulu m (píšeme $a \equiv b \pmod{m}$), právě když obě čísla a, b dávají při dělení modulem m stejný zbytek.

Příklad: $9 \equiv 23 \pmod{7}, 19 \equiv 51 \pmod{8}, -26 \equiv 22 \pmod{8}$, ale $11 \not\equiv 19 \pmod{5}$.

Věta: Relace kongruence je pro libovolný modul m relací ekvivalence na množině \mathbf{C} (je reflexivní, symetrická a tranzitivní).

Definice: Necht' m je pevné přirozené číslo větší než jedna. Označme

$$C_i = \{x \in \mathbf{C}; x \text{ dává po dělení číslem } m \text{ zbytek } i\}, \text{ pro } i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Pak množina C_i se nazývá zbytková třída podle modulu m . Symbolem \mathbf{C}_m pak označíme množinu všech zbytkových tříd podle modulu m , tj. $\mathbf{C}_m = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$.

Poznámka: Protože při dělení číslem m jsou možné zbytky $0, 1, \dots, m-1$, je počet zbytkových tříd podle modulu m roven číslu m . Každá zbytková třída podle modulu m obsahuje nekonečně mnoho celých čísel, která dávají při dělení modulem m též zbytek (tzn. liší se o nějaký celočíselný násobek modulu m).

Příklad: a) $m = 4$

$$C_0 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$C_1 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$C_2 = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$C_3 = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

b) $m = 5$

$$C_0 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$C_1 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$C_2 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$C_3 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$C_4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

Věta: Necht' m je pevné přirozené číslo větší než jedna. Pak množina \mathbf{C}_m všech zbytkových tříd podle modulu m tvoří rozklad množiny \mathbf{C} všech celých čísel.

Poznámka: Nyní se budeme zabývat binárními operacemi sčítání a násobení definovanými na množině \mathbf{C}_m pro různé moduly m . Obě operace na systému všech zbytkových tříd budeme chápat následujícím způsobem: Necht' např. $m = 5$. Zápis součtu $C_3 + C_4 = C_2$ znamená, že sečtením libovolného celého čísla dávajícího při dělení pěti zbytek 3 s libovolným celým číslem dávajícím při dělení pěti zbytek 4 dostaneme vždy celé číslo, které při dělení pěti dává zbytek 2. Analogicky zápis spoje násobení $C_2 \cdot C_4 = C_3$ znamená, že vynásobením libovolného celého čísla dávajícího při dělení pěti zbytek 2 s libovolným celým číslem dávajícím při dělení pěti zbytek 4 dostaneme vždy celé číslo, které při dělení pěti dává zbytek 3. Populárně řečeno,

výsledek sčítání či násobení zbytkových tříd podle modulu m získáme tak, že sečteme nebo vynásobíme indexy zbytkových tříd ze zadání úlohy, zjistíme zbytek součtu či součinu při dělení číslem m a tento zbytek je indexem zbytkové třídy hledaného součtu nebo součinu.

Příklady: a) $m = 4$: $C_1 + C_3 = C_0$, $C_2 + C_3 = C_1$, $C_2 \cdot C_3 = C_2$, $C_2 \cdot C_2 = C_0$.

a) $m = 3$: $C_1 + C_2 = C_0$, $C_2 + C_2 = C_1$, $C_2 \cdot C_2 = C_1$, $C_0 \cdot C_2 = C_0$.

Poznámka: V následujících tvrzeních uvedeme typy algebraických struktur definovaných na množinách zbytkových tříd. Tvrzení nebudeme dokazovat, vždy uvedeme jen ilustraci dané struktury pomocí tabulky. Kvůli zjednodušení zápisů rovněž budeme místo C_m uvádět pouze index m (zřejmě nebude moci dojít k nedorozumění). V předchozím příkladu a) tedy např. $1 + 3 = 0$, $2 + 3 = 1$, $2 \cdot 3 = 2$, $2 \cdot 2 = 0$.

Věta: Necht' m je pevné přirozené číslo větší než jedna. Pak algebraická struktura $(C_m, +)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem C_0 .

Ilustrace $(C_4, +)$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Věta: Necht' m je pevné přirozené číslo větší než jedna. Pak algebraická struktura (C_m, \cdot) je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem C_1 a agresivním prvkem C_0 .

Ilustrace (C_4, \cdot) :

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Ilustrace (C_5, \cdot) :

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Poznámka: Prohlédneme-li si pozorně obě tabulky v ilustraci předchozí věty, vidíme, že při operaci násobení zřejmě podstatně závisí na modulu. Odstraníme-li z obou těchto tabulek první řádek a první sloupec, odpovídající třídě C_0 , dostáváme následující tabulky struktur $(C_4 - \{C_0\}, \cdot)$ a $(C_5 - \{C_0\}, \cdot)$:

Ilustrace $(C_4 - \{C_0\}, \cdot)$:

.	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Ilustrace $(\mathbf{C}_5 - \{C_0\}, \cdot)$:

\cdot	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Struktura $(\mathbf{C}_4 - \{C_0\}, \cdot)$ nyní již není ani grupoid, neboť obsahuje v tabulce prvek 0, který již nepatří do nosné množiny (není v záhlaví tabulky). Oproti tomu, algebraická struktura $(\mathbf{C}_5 - \{C_0\}, \cdot)$ se ještě „zlepšila, nyní jde již o komutativní grupu. Který případ nastane, závisí na modulu.

Věta: Necht' modul m je prvočíslo. Pak algebraická struktura $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, \cdot)$ je komutativní grupa. Je-li modul m číslo složené, pak $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, \cdot)$ není ani grupoidem.

Důsledek: Necht' modul m je prvočíslo. Pak algebraická struktura se dvěma operacemi $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

Poznámka: Podle předchozího tvrzení není $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, \cdot)$ pro složený modul ani grupoidem. Protože je však potřeba popsat i struktury zbytkových tříd se dvěma operacemi pro složený modul m , musíme nějak „popsat“ situaci nul vyskytujících se v tabulkách (např. $(\mathbf{C}_4 - \{C_0\}, \cdot)$).

Definice: Necht' modul m je složené číslo, necht' pro dvě zbytkové třídy C_u, C_v podle modulu m platí $C_u \neq C_0, C_v \neq C_0$. Jestliže $C_u \cdot C_v = C_0$, pak obě třídy C_u, C_v se nazývají vlastní dělitelé nulového prvku C_0 .

Poznámka: Definice vlastních dělitelů nulového prvku (stručně jen dělitelů nuly) je samozřejmě obecnější. Struktury zbytkových tříd však poskytují užitečnou ilustraci tohoto pojmu. Současně ve shodě s obecnou teorií algebraických struktur se dvěma operacemi umožňuje existence dělitelů nuly popsat i struktury $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, +, \cdot)$ pro složený modul m .

Věta: Necht' modul m je složené číslo. Pak algebraická struktura se dvěma operacemi $(\mathbf{C}_m - \{C_0\}, +, \cdot)$ je komutativní okruh, který nikdy není oborem integrity (obsahuje dělitele nuly).

Příklad: V okruhu $(\mathbf{C}_4 - \{C_0\}, +, \cdot)$ je dělitelem nuly C_2 ; v okruhu $(\mathbf{C}_6 - \{C_0\}, +, \cdot)$ jsou dělitelé nuly C_2, C_3 a C_4 ; v okruhu $(\mathbf{C}_8 - \{C_0\}, +, \cdot)$ jsou dělitelé nuly C_2, C_4, C_6 .