Algebra 1
Domácí úkol 1

8. $\mathbb{Z}$, $a \oplus b = 4a + 4b$

1) neomezená definovanost operace $\oplus$

$\forall a,b \in \mathbb{Z}: a \oplus b = 4a + 4b = 4(a+b) \in \mathbb{Z}$ (čtyřnásobek libovolného celého čísla je celé číslo)

Operace $\oplus$ je na množině $\mathbb{Z}$ binární operací.

2) asociativní zákon

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

$(a \oplus b) \oplus c = (4a + 4b) \oplus c = 4(4a + 4b) + 4c = 16a + 16b + 4c$

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (4b + 4c) = 4a + 4(4b + 4c) = 4a + 16b + 16c$

$16a + 16b + 4c \neq 4a + 16b + 16c$

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Z}$ neplatí asociativní zákon.

3) komutativní zákon

$\forall a,b \in \mathbb{Z}: a \oplus b = b \oplus a$

$a \oplus b = 4a + 4b$
$b \oplus a = 4b + 4a = 4a + 4b$

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Z}$ platí komutativní zákon.

4) existence neutrálního prvku

$\exists e \in \mathbb{Z}\ \forall a \in \mathbb{Z}: a \oplus e = e \oplus a = a$

(operace je komutativní, dokážeme jen $a \oplus e$)

$a \oplus e = a$

$4a + 4e = a$

$4e = -3a$

$e = -\frac{3}{4}a$

Neutrální prvek musí být jednoznačně určen.

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Z}$ neexistuje neutrální prvek

5) Existence inverzních prvků

Vlastnost vyžaduje neutrální prvek e. Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Z}$ neexistují inverzní prvky.

9. $\mathbb{Q}$, $p \odot q = \sqrt{p \cdot q^2}$

1) neomezená definovanost operace $\odot$

Součin dvou racionálních čísel je číslo racionální, rovněž umocněním racionálního čísla dostaneme číslo racionální. Odmocnina racionálního čísla však nemusí být racionální číslo, např.:

$$p = 2,\ q = 1,\quad p \odot q = \sqrt{2 \cdot 1^2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Operace $\odot$ není na $\mathbb{Q}$ binární operací.

10. $\mathbb{Q}$, $x \oplus y = x - y + \frac{1}{3}$

1) Neomezená definovanost operace $\oplus$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}: \quad x \oplus y = \underbrace{x - y}_{\in \mathbb{Q}} + \frac{1}{3}$

Součet nebo rozdíl dvou racionálních čísel je číslo racionální.

Platí tedy $x \oplus y \in \mathbb{Q}$ a množina $\mathbb{Q}$ je na operaci uzavřená.

Operace $\oplus$ je na $\mathbb{Q}$ binární operací.

2) Asociativní zákon

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}: \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

$(x \oplus y) \oplus z = (x - y + \frac{1}{3}) \oplus z = x - y + \frac{1}{3} - z + \frac{1}{3} = x - y - z + \frac{2}{3}$

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y - z + \frac{1}{3}) = x - (y - z + \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = x - y + z$

$x - y - z + \frac{2}{3} \neq x - y + z$

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Q}$ neplatí asociativní zákon.

3) Komutativní zákon

$\forall x, y \in \mathbb{Q}: \quad x \oplus y = y \oplus x$

$x \oplus y = x - y + \frac{1}{3}$

$y \oplus x = y - x + \frac{1}{3}$

$x - y + \frac{1}{3} \neq y - x + \frac{1}{3}$

Pro operaci $\oplus$ na $\mathbb{Q}$ neplatí komutativní zákon.

4) Existence neutrálního prvku

$$a \oplus e = a - e + \frac{1}{3} = a$$

$$e = \frac{1}{3}$$

$$e \oplus a = e - a + \frac{1}{3} = a$$

$$e = 2a + \frac{1}{3}$$ ... neutrální prvek není jednoznačně určen

Pro binární operaci $\oplus$ na $\mathbb{Q}$ neexistuje neutrální prvek.

5) Inverzní prvky neexistují.

11. $\mathbb{Q}, \cdot$

1) Součinem dvou racionálních čísel vznikne vždy číslo racionální. Operace $\cdot$ je na $\mathbb{Q}$ binární operací.

2) Násobení je na $\mathbb{Q}$ asociativní.

3) Násobení je na $\mathbb{Q}$ komutativní.

4) Neutrální vzhledem k násobení je na $\mathbb{Q}$ číslo 1:

$$\forall a \in \mathbb{Q}: \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

5) Existence inverzních prvků:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a \neq 0$$

Každý prvek $a \in \mathbb{Q}$ až na $a = 0$ má svůj inverzní prvek ve tvaru $\frac{1}{a}$.