

Algebra 1
Domačí úkol 4

40. $x \circ (2,3) = (1,2,3)$

$(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

potřebujeme $\begin{pmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & 2 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$
beze změny

$x = (1,3)$

zk.: $(1,3) \circ (2,3)$ nejdřív $(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (*)

pak $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3) \checkmark$

U tabulky: slovo beru $(2,3)$, nahraťe $(1,3)$, v. prvních dvou řádků a sloupců je $(1,2,3) \checkmark$

41. $(\mathbb{Z}_1 + \cdot)$

$(\mathbb{Z}_1 +)$: $ND_1 \checkmark$ (sčítáním dvou celých čísel je celé číslo)

$K_1 \checkmark$ (sčítání je komutativní)

$A_1 \checkmark$ (sčítání je asociativní)

$N_1 \checkmark$ (0)

$I_1 \checkmark \forall a \in \mathbb{Z}: a^{-1} = -a$

$(\mathbb{Z}_1 +)$ je komutativní grupa

(*) můžete použít i zkrácený zápis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- (\mathbb{Z}, \cdot) : $ND_2 \checkmark$ (součinem dvou celých čísel je celé číslo)
 $(K_2 \checkmark)$ (násobení je komutativní)
 $A_2 \checkmark$ (násobení je asociativní)
 $D_2 \checkmark$ (platí distributivní zákon pro $+$ a \cdot na \mathbb{Z})
 $N_2 \checkmark$ (1)
 $I_2 \times$ např. $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
 $O_2 \checkmark$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je obor integrity

42. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$: $ND_1 \times$ ∇ neplatí: $3 + (-3) = 0, 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ není alg. struktura!
 $\left. \begin{array}{l} K_1 \\ A_1 \\ N_1 \end{array} \right\}$ neuvěřujeme

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: $ND \checkmark$
 $(K_2 \checkmark)$
 $A_2 \checkmark$
 $N_2 \checkmark$ (1)
 $I_2 \checkmark$ ($\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: x^{-1} = \frac{1}{x}$)
 $D_2 \checkmark$
 $O_2 \checkmark$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ není algebraická struktura, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je kom. grupa

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \cdot)$ není algebraická struktura

Ověřte, že $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je komutativní těleso.

43. $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$

$$x \oplus y = x + y, \quad x \odot y = \frac{1}{3}xy$$

(\mathbb{R}, \oplus) : je komutativní grupou, protože operace \oplus je obvyklé násobení

(\mathbb{R}, \odot) : $N_2 \checkmark \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : \frac{1}{3}xy \in \mathbb{R}$

$(K_2 \checkmark) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x \odot y = \frac{1}{3}xy = \frac{1}{3}yx = y \odot x$

$A_2 \checkmark \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \odot y) \odot z = (\frac{1}{3}xy) \odot z = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}xy)z = \frac{1}{9}xyz = x \odot (y \odot z)$

$N_2 \checkmark \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \odot e = e \odot x = x \Rightarrow e = 3$

$I_2 \checkmark \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 3$

$$x^{-1} = \frac{3}{x}$$

neplatí pro $x=0$,
0 pro násobení vynecháme

$D_2 \checkmark$

$O_2 \checkmark$

$(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ je komutativní těleso

44. $(\mathbb{Z}_{15}, \oplus, \odot)$, dělitele nul

(3) ... např. $3 \cdot 5 = 15$, $18 \cdot 20 = 360 = 24 \cdot 15$ apod

(5)

(6) ... např. $5 \cdot 6 = 30 = 2 \cdot 15$, $20 \cdot 21 = 420 = 28 \cdot 15$ apod

(9) ... např. $9 \cdot 5 = 45$

(10) ... např. $10 \cdot 3 = 30$

(12) ... např. $12 \cdot 5 = 60$