K a p i t o l a   XII.

P R U B Ě H   F U N K C E

§ 30. PŘEHLED ZÁKLADNÍCH ÚLOH.

V VIII.kapitole o grafech funkcí jsme na základních případech poznali,jak možno z grafu funkce vyčíst její základní vlastnosti,zvláště okolnosti,charakterisující její průběh v celém definičním oboru nebo aspoň v některém jeho intervalu.Přitom bylo zdůrazněno,že při výhradně grafickém vyšetřování průběhu funkce přicházíme jen k přibližným výsledkům,jež vznikají měřením nebo často také jen odhadem.

Nyní jsme již vyzbrojeni znalostmi a dovednostmi,které nám umožní dospět výpočtem k přesným výsledkům pro vyšetřování vlastností funkce v okolí určitého bodu nebo v celých intervalech.Povede nás k tomu jednak pojem limity funkce,její význam a výpočet,jednak pojem derivace funkce v bodě,její význam a výpočet.

Přehled základních úloh o funkci a jejím grafu je na stranách 119 a 120 i s poznámkami k řešení těchto úloh užitím funkční rovnice,limity funkce a užitím derivace funkce.U většiny úloh hledáme určitá x nebo množiny čísel x,pro která je splněna jistá vlastnost funkce.Přitom tato x obdržíme jako řešení rovnic nebo nerovností,jež sestavujeme z funkce nebo z jejich derivací.

Pro funkci hlavně určujeme :

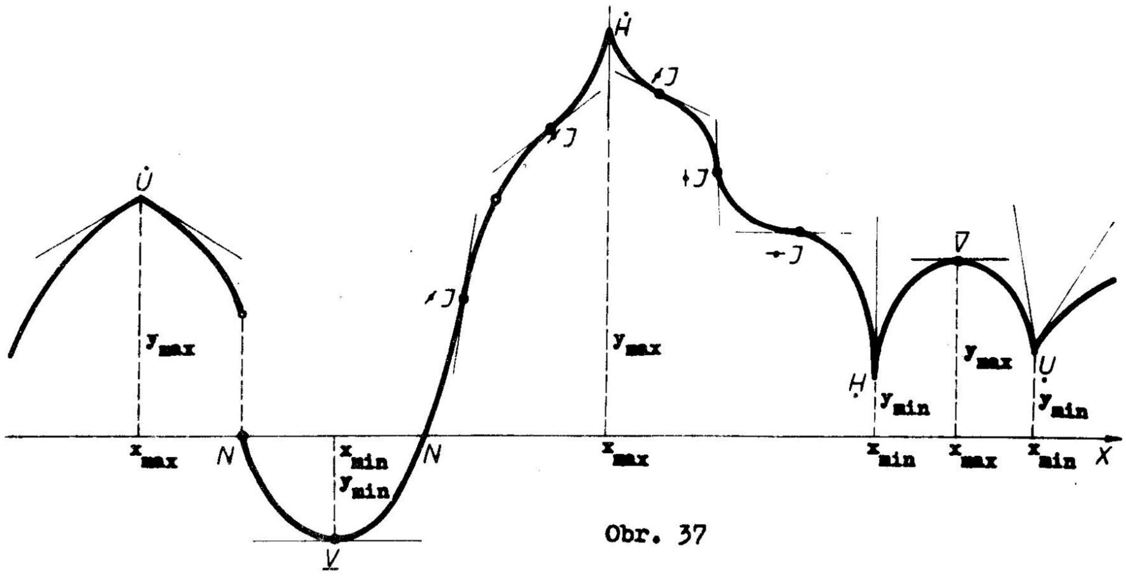
1) Definiční obor funkce.
2) Intervaly def.oboru,v nichž má funkce hodnoty kladné nebo záporné.
3) Intervaly def.oboru,v nichž funkce roste nebo klesá (intervaly monotonnosti).
4) Lokální extrémy funkce: a) x vedoucí k lokálním extrémům, x_{max} , x_{min}

   b) extrémní funkční hodnoty, y_{max} , y_{min}

Pro graf funkce určujeme :

1) Charakteristické body,případně jejich tečny .
2) Asymptoty

V následujícím vymyšleném grafu jsou zobrazeny charakteristické body,jež se vyskytují v základních případech.



Obr. 37

Pro stručný zápis výsledků zavedeme si označení a pojmenování :

$\bar{V}$,,horní'' vrchol , $\dot{H}$,,horní''bod vratu (hrot) , $\dot{\bar{U}}$,,horní''úhlový bod ;

$\underline{V}$,,dolní''vrchol , $\underset{\bullet}{H}$,,dolní''bod vratu (hrot) , $\underset{\bullet}{\underline{U}}$,,dolní''úhlový bod ;

Souřadnice x bodů $\bar{V}$, $\dot{H}$, $\dot{U}$ vede k lokálnímu maximu funkce ,

souřadnice x bodů $\underline{V}$, $\underset{\bullet}{H}$, $\underset{\bullet}{U}$ vede k lokálnímu minimu funkce .

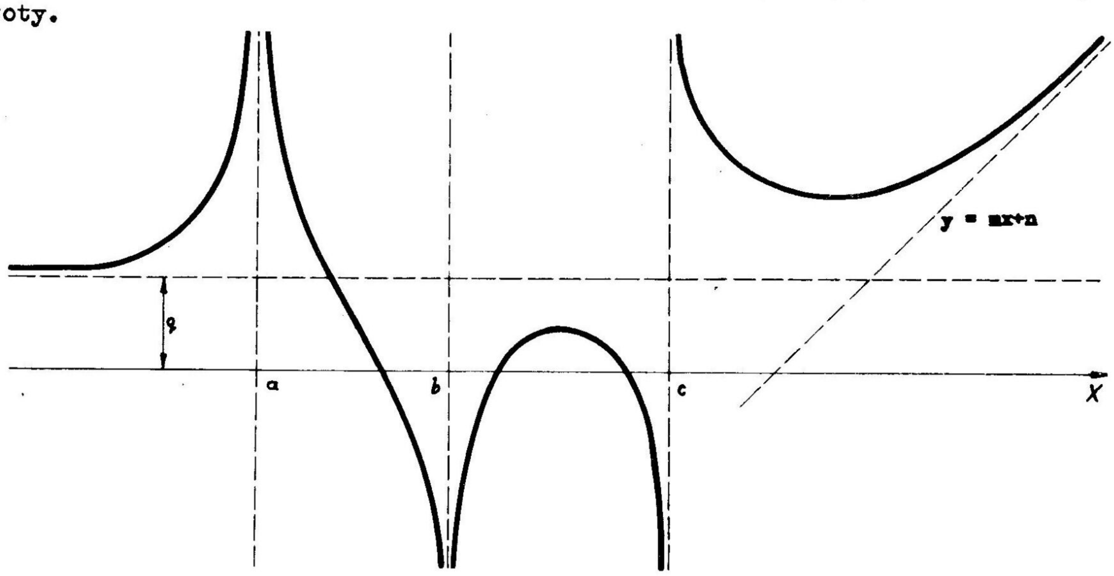
$\multimap$J , inflexní bod,jehož tečna je rovnoběžná s osou x ,

/J , inflexní bod,jehož tečna je různoběžná s osou x ,

|J , inflexní bod,jehož tečna je rovnoběžná s osou y .

N , nulové body (průsečíky grafu s osou x)

V následujícím vymyšleném grafu jsou zobrazeny různé asymptoty.Pro polohu asymptot vzhledem ke křivce je zvoleno označení,které se připojuje k rovnici asymptoty.



Obr.38

Asymptoty rovnoběžné s osou y :

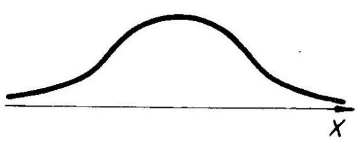
x = a, $^{+}|^{+}$; x = b, $_{-}|_{-}$; x = c, $_{-}|^{+}$

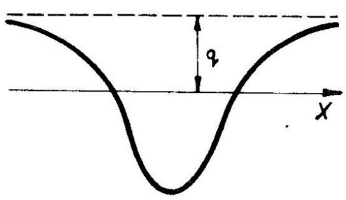
Asymptota rovnoběžná s osou x :

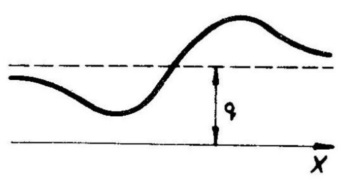
y = q , $\overset{-}{\overline{}}$

Různé polohy křivky k asymptotě rovnoběžné s osou x :

y = 0 , $\overline{}^{\,-\ +}$ y = q , $\overline{}_{-\ +}$ y = q , $\overline{}^{+}_{-}$







Obr.39 Obr.40 Obr.41

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH ÚLOH O FUNKCI A JEJÍM GRAFU.

Čís.	Úlohy o funkci $y = f(x)$	Řešení úlohy	Úlohy o grafu funkce $y = f(x)$
1	Def. obor funkce racionální lomené iracionální logaritmické cyklometrické lomené	$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, množina všech reál. čísel bez reál. kořenů rovnice $Q(x) = 0$ $y = \sqrt[2n]{g(x)}$, $g(x) \geqq 0$; $y = \frac{1}{\sqrt[2n]{g(x)}}$, $g(x) > 0$ $y = \ln g(x)$, $g(x) > 0$; $y = \frac{1}{\ln g(x)}$, $g(x) > 0, g(x) \neq 1$ $y = \arcsin g(x)$, $y = \arccos g(x)$, $-1 \leqq g(x) \leqq 1$ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, průnik def. oborů funkcí $u(x)$, $v(x)$ bez reál. kořenů rovnice $v(x) = 0$	Množina bodů osy x, pro něž existují body grafu
2	Body nespojitosti odstranitelné I. druhu ... II. druhu ...	Pro $x = a$, v němž ... funkce není definována a má vlastní limitu, ... obě jednostranné limity existují a jsou různé, tj.: $\lim_{x \to a-} f(x) = A$, $\lim_{x \to a+} f(x) = B$, $A \neq B$ ... aspoň jedna jednostranná limita neexistuje nebo je nevlastní.	Souřadnice x bodů grafu, v nichž nastalo přerušení souvislého průběhu grafu.
3	Hodnoty proměnné x, jež vedou a) k dané funkční hodnotě h b) k nulovým bodům funkce	a) Kořeny rovnice $f(x) = h$ b) Kořeny rovnice $f(x) = 0$	Souř. x průsečíku grafu a) s přímkou $y = h$ b) s osou x
4	Intervaly proměnné x pro a) kladné funkční hodnoty b) záporné funkční hodnoty	a) Řešení nerovnosti $f(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f(x) < 0$	Části osy x a) nad nimiž jsou body grafu b) pod nimiž jsou body grafu
5	a) Intervaly růstu b) Intervaly klesání	a) Řešení nerovnosti $f'(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f'(x) < 0$	Části osy x, jimž přísluší a) stoupající část grafu b) klesající část grafu
6	Lokální extrémy a) lokální maximum b) lokální minimum	1) Pro x, jež splňuje : $f'(x) = 0$ a a) $f''(x) < 0$ (nebo $f'' = f''' = \dots f^{(k-1)} = 0, f^{(k)} < 0$) b) $f''(x) > 0$ (nebo $f'' = f''' = \dots f^{(k-1)} = 0, f^{(k)} > 0$) pro k sudé 2) Pro x, v němž existují různé jednostranné a) vlastní derivace b) nevlastní derivace	Body, jichž tečna t // x a a) graf leží pod tečnou (horní vrchol) b) graf leží nad tečnou (dolní vrchol) a) Úhlový bod grafu b) Bod vratu s tečnou t // y.
7	a) Intervaly konvexnosti b) Intervaly konkávnosti	a) Řešení nerovnosti $f''(x) > 0$ b) Řešení nerovnosti $f''(x) < 0$	a) konvexní část grafu b) konkávní část grafu

DALŠÍ ÚLOHY O GRAFU FUNKCE

Čís.	Úloha o grafu funkce $y = f(x)$	Řešení úlohy
8	Směrnice tečny, rovnice tečny a normály v bodě (x_0, y_0)	$k_t = f'(x_0)$; $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$; $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}.(x - x_0)$
9	Inflexní body s tečnou rovnoběžnou s osou x různoběžnou s osou x	Pro x, jež splňuje : $f'(x) = 0$ $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) = 0$, $f'''\neq 0$, (nebo $f'' = \dots f^{(k-1)} = 0, f^{(k)} \neq 0$ pro $\underline{k}$ liché
10	Body, jichž tečny jsou rovnoběžné s osou y a) inflexní body b) bod vratu $\dot{H}$ nebo $\underset{\bullet}{H}$	Pro x=a, v němž první derivace není definována a v němž a) $\lim_{x\to a-} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a+} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x\to a-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f'(x) = -\infty$ b) $\lim_{x\to a-} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a+} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f'(x) = +\infty$
11	Asymptota rovnoběžná s osou x	$y = A$, když existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
12	Asymptota rovnoběžná s osou y	$x = a$, když funkce f(x) není v bodě $\underline{a}$ definována a když aspoň jedna jednostranná limita je nevlastní.
13	Asymptota různoběžná s osou x i s osou y	$y = kx + q$, když konstanty k , q jsou určeny limitami : $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$ (při ∞ platí současně horní nebo dolní znaménko)
14	Asymptota různoběžná s osou x i y, je-li zároveň tečnou v nevlastním bodě.	$y = kx + q$, když konstanty k , q jsou určeny limitami : $k = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$, $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$
	Shrnutí. Pro náčrtek grafu funkce určujeme :	Charakteristické body (vrcholy, body inflexní, body vratu, úhlové body, nulové body, body nespojitosti) : viz úlohy 2 , 3 , 6 , 9 , 10 Tečny v bodě viz úloha 8 Asymptoty viz úlohy 11 - 14

§ 31. ALGEBRAICKÉ FUNKCE.

I. Racionální funkce celé.

Racionální funkce celé (mnohočleny,polynomy) jsou definované a spojité pro každé x.Jsou-li stupně n-tého,pak může existovat nejvýš (n-1) hodnot proměnné x, jež vedou k lokálním extrémům.Tato x jsou současně hranicemi intervalů monotonnosti.

Grafem racionální funkce celé n-tého stupně ($n > 2$) je tzv.„vyšší parabola“, která může mít nejvýš (n-1) vrcholů a nejvýš (n-2) inflexních bodů.

Při výpočtech se setkáme s řešením algebraických rovnic a nerovností vyšších stupňů.Viz III. a IV. kapitola.Některé z nich se nám zatím nepodaří rozřešit.

233.cvičení.Pro dané funkce určiti lokální extrémy,intervaly monotonnosti,charakteristické body grafu a náčrtek grafu.

a) $y= 2x^3-9x^2+12x+1$, [$\overline{V}(1,6)$, $\underline{V}(2,5)$, $\nearrow J(\frac{3}{2},5\frac{1}{2})$] ;

b) $y= 3x^4-4x^3$, [$\underline{V}(1,-1)$, $\rightarrow J_1(0,0)$, $\nearrow J_2(\frac{2}{3},-\frac{16}{27})$];

c) $y= x^3-3x^2+3x+3$, [$\rightarrow J(1,4)$, funkce je v int.$(-\infty,+\infty)$ rostoucí] ;

d) $y= x^4-2x^3-3x^2+4x-5$, [$\overline{V}(\frac{1}{2},-3\frac{15}{16})$, $\underline{V}(-1,-9)$, $\underline{V}(2,-9)$, $\nearrow J_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2},y_1)$, $\nearrow J_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2},)$];

e) $y= (x-1)^2.(x+1)^3$, [$\overline{V}(\frac{1}{5},y\doteq+1,1)$, $\underline{V}(1,0)$, $\rightarrow J_1(-1,0)$, $\nearrow J_2(\frac{1+\sqrt{6}}{5},y_2)$, $\nearrow J_3(\frac{1-\sqrt{6}}{5},y_3)$];

DESÍTKA ÚLOH čís. 38

Úkol předešlého cvičení proveďte pro funkce :

1) $y= x^3-5x^2+3x+5$, [$\overline{V}(\frac{1}{3},5\frac{13}{27})$, $\underline{V}(3,-4)$, $\nearrow J(\frac{5}{3},\frac{20}{27})$];

2) $y= \frac{1}{4}x^3-3x+1$, [$\overline{V}(-2,5)$, $\underline{V}(2,-3)$, $\nearrow J(0,1)$] ;

3) $y= 1 + x - x^3$, [$\overline{V}(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{9+2\sqrt{3}}{9})$, $\underline{V}(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{9-2\sqrt{3}}{9})$, $\nearrow J(0,1)$];

4) $y= x^4- 4x^3+ 4x^2$, [$\overline{V}(1,1)$, $\underline{V}(0,0)$, $\underline{V}(2,0)$, $\nearrow J_1(\frac{3+\sqrt{3}}{3},y_1)$, $\nearrow J_2(\frac{3-\sqrt{3}}{3},y_2)$];

5) $y= x^4- 2x^3+ 1$, [$\underline{V}(\frac{3}{2},-\frac{11}{16})$, $\rightarrow J_1(0,1)$, $\nearrow J_2(1,0)$] ;

6) $y= \frac{1}{4}x^4 + x^3$, [$\underline{V}(-3,-6\frac{3}{4})$, $\rightarrow J_1(0,0)$, $\nearrow J_2(-2,-4)$] ;

7) $y= x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-4$, [$\rightarrow J(1,-3)$, funkce je v int.$(-\infty,+\infty)$ rostoucí] ;

8) $y= x^4+4x^3+6x^2+4x-3$, [$\underline{V}(-1,-4)$ je tzv.plochý bod] ;

9) $y= (x+1)^2.(x-1)^3$, [$\overline{V}(-1,0)$, $\underline{V}(\frac{-1}{5},y\doteq-1,1)$, $\rightarrow J_1(1,0)$, $\nearrow J_{2,3}(\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5},y_{2,3})$]

10) $y= (x-1)^2.(x+2)^3$, [$\overline{V}(\frac{-1}{5},y\doteq8,4)$, $\underline{V}(1,0)$, $\rightarrow J_1(-2,0)$, $\nearrow J_{2,3}(\frac{-2\pm3\sqrt{6}}{10},y_{2,3})$]

II. Racionální funkce lomené.

1. Racionální funkce lomené $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, jichž jmenovatel Q(x) nemá reál.kořeny (Q(x) není pro žádné reálné x roven nule).

Tyto funkce jsou definovány a spojité pro každé x.

Nechť je P(x) stupně n-tého a Q(x) stupně m-tého.Pak pro $n \leq m$ mají grafy uvažovaných funkcí asymptotu totožnou nebo rovnoběžnou s osou x. Je to přímka y = q, kde $q = \lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$.

V následujících cvičeních a desítkách úloh určiti pro dané funkce lokální extrémy, intervaly monotonnosti,charakteristické body grafu a náčrtek grafu.

Pro některé případy bude třeba načrtnout graf funkce bez všech možných inflexních bodů,neboť k určení jejich souřadnic x vede rovnice vyššího stupně nám známými metodami neřešitelná.Ve výsledcích bude zapsáno $J(x^3-3x+1=0)$.

234. <u>cvičení</u>. asymptota:

a) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, [$\bar{V}(0,1)$, /$J_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$, /$J_2\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$, $y=0, \frac{-\quad +}{}$];

b) $y=\dfrac{-2x}{x^2+1}$, [$\bar{V}(-1,1)$, $\underline{V}(1,-1)$, /$J_1(0,0)$, /$J_2\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, /$J_3\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=0, \frac{-\quad}{\quad +}$];

c) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, [$\bar{V}(1,3)$, $\underline{V}\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, /$J(x^3-3x+1=0)$ $y=1, \frac{\quad +}{-}$];

DESÍTKA ÚLOH čís. 39

1) $y=\dfrac{4}{2+x^2}$, [$\bar{V}(0,2)$, /$J_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{2}\right)$, /$J_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{2}\right)$; $y=0, \frac{-\quad +}{}$];

2) $y=\dfrac{x}{1+2x^2}$, [$\bar{V}\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\underline{V}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, /$J_1(0,0)$, /$J_2\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, /$J_3\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $y=0, \frac{\quad +}{-}$];

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, [$\underline{V}(0,0)$, /$J_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$, /$J_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$; $y=1, \frac{}{-\quad +}$];

4) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$, [$\bar{V}(-1,2)$, $\underline{V}(1,0)$, /$J_1(0,1)$, /$J_{2,3}\left(\pm\sqrt{3}, 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $y=1, \frac{-\quad}{\quad +}$];

5) $y=\dfrac{4x^4}{1+x^4}$, [$\underline{V}(0,0)$, /$J_{1,2}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}, \frac{3}{2}\right)$; $y=4, \frac{}{-\quad +}$];

6) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$, [$\bar{V}(1-\sqrt{2}, y\doteq 7)$, $\underline{V}\left(1+\sqrt{2}, y\doteq \frac{-1}{10}\right)$, $J(x^3-4x^2-2x+1=0)$; $y=1, \frac{-\quad}{\quad +}$];

7) $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$, [$\bar{V}\left(-1,2\frac{1}{3}\right)$, $\underline{V}(1,-3)$, $J(x^3-3x+1=0)$; $y=1, \frac{-\quad}{\quad +}$];

8) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$, [$\bar{V}(0,4)$, $\underline{V}\left(-2,2\frac{2}{3}\right)$, $J(x^3+3x^2-1=0)$; $y=3, \frac{\quad +}{-}$];

9) $y=\dfrac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$, [$\bar{V}(1,2)$, $\underline{V}(-1,-2)$, /$J_1(0,0)$; $y=0, \frac{\quad +}{-}$];

10) $y=\dfrac{x^2}{x^4+4}$, [$\underline{V}(0,0)$, $\bar{V}\left(\sqrt{2},\frac{1}{4}\right)$, $\bar{V}\left(-\sqrt{2},\frac{1}{4}\right)$, /$J_{1,2}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{24+4\sqrt{33}}{3}}, y\right)$, /$J_{3,4}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{24-4\sqrt{33}}{3}}, y\right)$, $y=0, \frac{-\quad +}{}$].

2. <u>Racionální funkce lomené</u> $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, <u>jichž jmenovatel má reálné kořeny</u>

($Q(x)$ je rozložitelný mnohočlen)

Má-li mnohočlen $Q(x)$ $\underline{r}$ různých reálných kořenů, má daná funkce $\underline{r}$ bodů nespojitosti. Jsou-li x_1, x_2, x_3, ... x_r reálné kořeny, pak kořen x_i je bodem odstranitelné nespojitosti, když $\lim\limits_{x\to x_i} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je vlastní, nebo bodem nespojitosti 2. druhu, když $\lim\limits_{x\to x_i} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je nevlastní, - případně jen jednostranná.

V případě nespojitosti 2. druhu je přímka $x=x_i$ asymptotou grafu funkce.

Platí-li o stupních mnohočlenů $P(x)$, $Q(x)$ opět $n \leqq m$, pak grafy těchto funkcí mají asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic.

V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh určete lokální extrémy, charakteristické body grafu, asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic a náčrtek grafu.

235. <u>cvičení</u>.

a) $y=\dfrac{3x-2}{2x^2}$, [$\bar{V}\left(\frac{4}{3}, \frac{9}{16}\right)$, /$J\left(2,\frac{1}{2}\right)$; $y=0, \frac{\quad +}{-}$; $x=0, {}_{-}|_{-}$;];

b) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$, [/$J(0,0)$, $y=0, \frac{-\quad}{\quad +}$; $x=-\sqrt{3}, {}^{+}\lfloor$, $x=\sqrt{3}, {}^{+}|_{-}$];

c) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$, [Pro $x=1$ bod nespoj. odstranit., $y=1, \frac{\quad +}{-}$; $x=-1, {}_{-}|^{+}$.];

Poznámka. Při sestrojování náčrtku grafu narýsujeme nejprve asymptoty a všechny určené body. Teprve podle potřeby vypočítáváme souřadnice dalších bodů.

DESÍTKA ÚLOH čís. 40

1) $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$, [lok.extr.neexist., /J(0,0); $y=0,\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=-2,\ {}_{-}|^{+}$; $x=2,\ {}_{-}|^{+}$];

2) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$, [lok.extr.neexist., /J(0,0); $y=0,\frac{-\quad}{\quad +}$; $x=-1,\ {}^{+}|_{-}$; $x=1,\ {}^{+}|_{-}$];

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, [$\overline{V}(0,0)$, $y=1,\frac{-\quad +}{}$; $x=-1,\ {}^{+}|_{-}$; $x=1,\ {}_{-}|^{+}$];

4) $y=\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$, [$\overline{V}(\frac{8}{3},2\frac{9}{16})$, /J$(4,2\frac{1}{2})$; $y=2,\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=0,\ {}_{-}|_{-}$;];

5) $y=\dfrac{4x+4}{x^2}-2$, [$\underline{V}(-2,-3)$, /J$(-3,-2\frac{8}{9})$; $y=-2,\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=0,\ {}^{+}|^{+}$;];

6) $y=\dfrac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$, [$\underline{V}(-1,\frac{3}{2})$, /J$(-2,1\frac{5}{9})$; $y=2,\frac{\quad +}{-\quad}$; $x=1,\ {}^{+}|^{+}$;];

7) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$, [$\overline{V}(0,-1)$, $\underline{V}(3,\frac{1}{2})$; $J(2x^3-11x^2+6x-9=0)$; $y=1,\frac{-\quad}{\quad +}$; $x=-3,\ {}^{+}|_{-}$; $x=1,\ {}_{-}|^{+}$];

8) $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$, [lok.extr.neexist., /J$(\frac{1}{2},0)$; $y=0,\frac{-\quad}{\quad +}$; $x=0,\ {}^{+}|^{+}$; $x=1,\ {}_{-}|_{-}$];

9) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$, [$\underline{V}(1,\frac{3}{2})$, /J$(-\sqrt[3]{2};\ 0)$; $x=0,\ {}_{-}|^{+}$;];

10) $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$, [$\underline{V}(2,3)$, /J$(1-\sqrt[3]{2},\ 0)$; $x=1,\ {}_{-}|^{+}$;];

3. Racionální funkce neryze lomené s rozdílem stupňů $n-m=1$ se liší od předešlých dvou typů tím, že jejich grafy mají také asymptotu obecně položenou. Přímka $y = kx+q$ je asymptotou křivky $y = f(x)$, jestliže pro konstanty k, q platí:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx],$$

za předpokladu, že obě limity existují. Přitom v podmínkách $x\to\pm\infty$ platí současně znaménka horní nebo dolní.

Takto určená asymptota nemusí být limitní polohou tečny pro $x\to\pm\infty$.

Například pro funkci $y=\dfrac{-x^3+2x+3}{x^2+5x}$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x+3}{x^3+5x^2}=\ldots\ldots=-1,\quad q=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^3+2x+3}{x^2+5x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+3}{x^2+5x}=5$$

Asymptotou obecně položenou grafu dané funkce jest tedy přímka $y=-x+5$; graf má ještě asymptoty $x=0$, $x=-5$.

Pro uvažované racionální funkce lomené lze určit asymptotu různoběžnou k ose y bez výpočtu limit pro k a q. Ze vzorce pro q se odvozuje, že neryze lomenou funkci s rozdílem stupňů $n-m=1$ lze dělením čitatele jmenovatelem nahradit součtem lineární části $(kx+q)$ a ryze lomené části $\varphi(x)$, o níž platí $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$, a že právě část lineární vede k asymptotě $y=kx+q$.

V uvedeném příkladě: $(-x^3+2x+3):(x^2+5x)=-x+5+\dfrac{-23x+3}{x^2+5x}$

Lineární část podílu, tj. dvojčlen $(-x+5)$ je pravou stranou rovnice asymptoty.

K těmto funkcím zařadíme nejprve funkci racionální neryze lomenou s kvadratickým čitatelem a lineárním jmenovatelem. Obecně je jejím grafem hyperbola, jejíž jedna asymptota je kolmá k ose x a druhá obecně položená. Z rovnic těchto dvou asymptot můžeme metodami analytické geometrie pro tuto obecněji položenou hyperbolu určit souřadnice středu, rovnice os, případně délky os a ostatní konstanty.

/83/. příklad. $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$ čili v implicitním tvaru $x^2-xy+3x-2y-1=0$

Z implicitního tvaru poznáváme, že jde skutečně o [illegible].

Dělením čitatele jmenovatelem obdržíme (x^2+3x-1) : [illegible] $-\frac{2}{x+2}$

Rovnice asymptot : $x = -2$ čili $x + 2 = 0$; y = [illegible] $x-y+1 = 0$

Střed $S(-2,-1)$; rovnice os: $o_1 \equiv y = x(\sqrt{2}+1)$ + [illegible] $(1-\sqrt{2}) + 1-2\sqrt{2}$

236.<u>cvičení</u>. Určiti asymptoty, střed a osy hyperboly :

a) $y= \dfrac{x^2}{3x+1}$, [$x= -\frac{1}{3}$, $y= \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$, $S(-\frac{1}{3},-\frac{2}{9})$; $o_{1,2}\equiv$ [illegible] $y-1\pm\sqrt{10} = 0$

b) $y= \dfrac{x^2}{x+1}$, [$x= -1$, $y= x-1$, $S(-1,-2)$; $o_{1,2}\equiv(1\pm\sqrt{2})x - y - 1\pm\sqrt{2} = 0$];

c) $y= \dfrac{x^2+1}{x}$, [$x= 0$, $y= x$, $S(0, 0)$; $o_{1,2}\equiv(1\pm\sqrt{2})x - y = 0$];

d) $y= \dfrac{2x^2+x}{x+1}$, [$x= -1$, $y= 2x-1$, $S(-1,-3)$; $o_{1,2}\equiv y= (2\pm\sqrt{5})x - 1 \pm\sqrt{5}$].

237.<u>cvičení</u>. Pro dané funkce určiti asymptoty a charakteristické body grafu :

a) $y= \dfrac{x^3}{x^2-1}$, [$\bar{V}(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2})$, $\underline{V}(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $\leftarrow J(0,0)$; $y=x$; $x=-1$, $\_|^+$; $x=1$, $\_|^+$];

b) $y= \frac{1}{2}\cdot\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, [$\bar{V}(-5,-6\frac{3}{4})$, $\leftarrow J(1,0)$; $y= \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$; $x=-1$, $\_\ \_$]

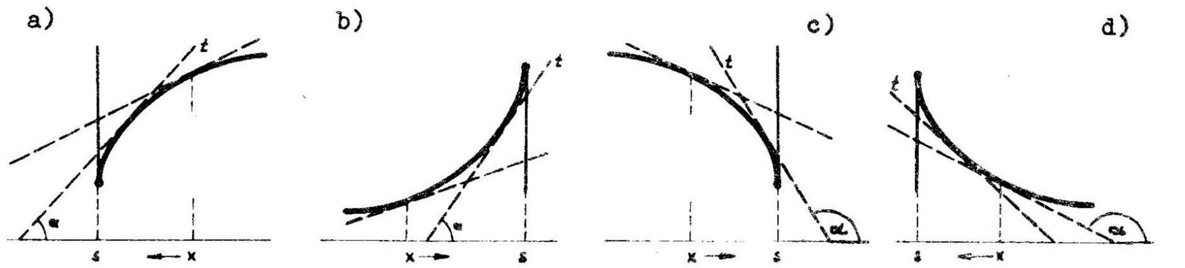
c) $y= \dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$, [$\bar{V}(1,\frac{7}{2})$, $\underline{V}(2,\frac{27}{8})$, $\bar{V}(-3,\frac{-33}{18})$, $\nearrow J(\frac{9}{7}, y\doteq3\frac{1}{2})$; $y=\frac{1}{2}x+1$; $x=0$, $\_|\_$].

III. <u>Iracionální funkce</u>.

Iracionální funkce mají někdy v některém bodě nevlastní derivaci. Je-li v tomto bodě daná funkce definována, pak graf funkce má v tomto bodě tečnu (polotečnu) rovnoběžnou s osou y. Mohou to být :

1) krajní body intervalů definičního oboru (viz obrazce : 13 , 14 , 15)
2) inflexní body (viz bod $\updownarrow J$ v obrazci 37)
3) body vratu (viz body $\dot{H}$, $\underset{\bullet}{H}$ v obrazci 37)

Pro jejich určení vyšetřujeme jednostranné nevlastní derivace. Pomůckou je nám geometrický význam derivace funkce v bodě (směrnice tečny)



Obr. 42

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) > 0$	$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) > 0$	$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) < 0$	$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) < 0$
Když $x \to s+$, $f'(x) \to +\infty$	Když $x \to s-$, $f'(x) \to +\infty$	Když $x \to s-$, $f' \to -\infty$	Když $x \to s+$, $f' \to -\infty$
$\lim\limits_{x\to s+} f'(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to s-} f'(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to s-} f'(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to s+} f'(x) = -\infty$

Kombinací těchto čtyř případů obdržíme body inflexní s tečnou rovnoběžnou s osou y nebo body vratu :

1. nastanou-li oba případy a), b) nebo c), d), má graf pro $x=s$ inflexní bod $\updownarrow J$,
2. nastanou-li oba případy a), c) nebo b), d), má graf pro $x=s$ bod vratu $\underset{\bullet}{H}$ nebo $\dot{H}$.

Viz obrazec 37, str. 117.

/84/.**příklad**.

a) Funkce $y = \sqrt[3]{x-1}$ má derivaci $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, která neexistuje v bodě $x=1$.

Funkce je v bodě $x=1$ definována a proto vyšetřujeme nevlastní derivace :

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

Graf funkce má v bodě $x=1$ inflexní bod s tečnou rovnoběžnou s osou y.

b) Funkce $y = \sqrt[3]{x^2}$ má derivaci $y' = \dfrac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$, která neexistuje v bodě $x=0$.

Nevlastní derivace :

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2}{3.\sqrt[3]{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{2}{3.\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Graf funkce má v bodě $x=0$ bod vratu $\underset{\cdot}{H}$. Pro $x=0$ existuje lokální minimum.

238.**cvičení**. Určiti všechny možné lokální extrémy funkcí, případně inflexní body :

a) $y = 3 - \sqrt[3]{x-2}$, [$\updownarrow J(2\,,\,3)$]

b) $y = \sqrt{(1-x^2).(1+2x^2)}$, [$\overline{V}(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{\sqrt{8}}), \underline{V}(0,1)$; body $(-1,0),(1,0)$ mají „svislé" polotečny .]

c) $y = 3.\sqrt[3]{x^2} - x^2$, [$\overline{V}(-1,2), \overline{V}(1,2), \underset{\cdot}{H}(0,0)$]

d) $y = 2x - 3.\sqrt[3]{x^2}$, [$\underline{V}(1,-1)$, $\dot{H}(0,0)$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 41

Úkol předešlého cvičení proveďte pro funkce :

1) $y = (x+1)^3.\sqrt[3]{x^2}$, [$\overline{V}(-\frac{2}{11}, y \doteq 0{,}15)$, $\leftarrow J(-1,0)$, $\underset{\cdot}{H}(0,0)$];

2) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, [$\overline{V}(0,2)$, $\underset{\cdot}{H}_1(-1, \sqrt[3]{4})$, $\underset{\cdot}{H}_2(1, \sqrt[3]{4})$] ;

3) $y = \sqrt[3]{x-1}.\sqrt[3]{(2x-1)^2}$, [$\underline{V}(\frac{5}{6}, \frac{-\sqrt[3]{2}}{3})$, $\updownarrow J(1,0)$, $\dot{H}(\frac{1}{2},0)$] ;

4) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$, [$\underset{\cdot}{H}(-1,-\sqrt[3]{4})$, $\dot{H}(1, \sqrt[3]{4})$, $\nearrow J(0,0)$; $y=0$, $\overline{-\quad +}$] ;

5) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-4}$, [$\overline{V}_1(-\sqrt{2},2\sqrt[3]{2}), \overline{V}_2(\sqrt{2},2\sqrt[3]{2}), \underset{\cdot}{H}(0,\sqrt[3]{4})$, $\updownarrow J_1(-2,\sqrt[3]{4})$, $\updownarrow J_2(2,\sqrt[3]{4})$; $y=0$, $\overline{-\quad +}$]

6) $y = \sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}$, [$\overline{V}(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\cdot}{H}(1,0)$, $\underset{\cdot}{H}(2,0)$] ;

7) $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$, [$\overline{V}(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\cdot}{H}(0,0)$, $\updownarrow J(2,0)$; asympt. $y = -x + \frac{2}{3}$] ;

8) $y = -x^2.\sqrt[5]{(x-2)^2}$, [$\overline{V}(0,0)$, $\underline{V}(\frac{5}{3},\frac{-25}{9\sqrt[5]{9}})$, $\dot{H}(2,0)$, inflex.body existují]

9) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, [$\underline{V}(0,-1)$, $\updownarrow J_1(-1,0)$, $\updownarrow J_2(1,0)$]

10) $y = \dfrac{10.\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$ [$\overline{V}(-\frac{3}{2},\frac{8}{9}\sqrt[3]{\frac{25}{4}})$, $\overline{V}(3,\frac{5}{9}\sqrt[3]{4})$, $\underset{\cdot}{H}(1,0)$; $y=0$, $\overline{-\quad +}$]

239.**cvičení**. Vyšetřiti průběh daných iracionálních funkcí s náčrtkem grafu :

a) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, [$x = -1$, $|_-$; funkce je v int.$(-1,+\infty)$ rostoucí] ;

b) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$, [$(-\infty,-2\rangle, (2,+\infty)$; bod $(-2,0)$ má svislou polotečnu; $x=2$, $|^+$; $y=1$, $\overline{-\quad +}$]

c) $y = \sqrt{\dfrac{a^3 - x^3}{3x}}$, $a > 0$, [$\nearrow J(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}, \frac{a}{2}\sqrt[3]{2})$; bod $(a,0)$ má svislou polotečnu; $x=0$, $|^+$];

d) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})$, [$\underline{V}(0,1)$; asympt.: $y = x$; $y = -x$] .

§ 32. TRANSCENDENTNÍ FUNKCE.

I. Goniometrické funkce.

Při určování průběhu funkcí goniometrických se setkáme s řešením goniometrických rovnic a nerovností. V každém případě si uvědomíme, že vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí obdržíme vždy nekonečnou množinu bodů vedoucích k lokálním extrémům, nekonečnou množinu intervalů růstu, klesání, pro graf nekonečnou množinu vrcholů, bodů inflexních apod. Každou množinu zapíšeme užitím celého čísla k a čísla vyjadřujícího periodu příslušné funkce.
K správnému sestavení všech zápisů užíváme grafů základních goniometrických funkcí.

/85/.**příklad**. Určiti lokální extrémy a charakteristické body grafu funkce
$y = -\frac{3}{2}.\sin(3x + \frac{\pi}{4})$, vyšetřované bez užití 1. a 2. derivace již v kapitole o grafech funkcí. Viz / str. 80, obr. 20 /.

$y' = -\frac{9}{2}.\cos(3x+ \frac{\pi}{4})$ $\qquad$ $y'' = \frac{27}{2}.\sin(3x+ \frac{\pi}{4})$

Nutná podmínka pro lokální extrémy: $\cos(3x+ \frac{\pi}{4}) = 0$, což je splněno, když

a) $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$
$x = \frac{1}{12}.(8k+1).\pi$

b) $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + k.2\pi$
$x = \frac{1}{12}.(8k+ 5).\pi$

Dosazením do 2. derivace se přesvědčíme o splnění postačující podmínky :

$$y'' = \frac{27}{2}.\sin\left[\frac{3}{12}(8k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{27}{2}.\sin(\frac{\pi}{2} + k.2\pi) = \frac{27}{2}.1 > 0$$

$$y'' = \frac{27}{2}.\sin\left[\frac{3}{12}.(8k+5) + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{27}{2}.\sin(\frac{3}{2}\pi+ k.2\pi) = \frac{27}{2}.(-1) < 0$$

Množina $x = \frac{1}{12}(8k+1)\pi$ dává body, jež vedou k lokálnímu minimu funkce.

Množina $x = \frac{1}{12}.(8k+ 5)\pi$ dává body, jež vedou k lokálnímu maximu funkce.

Několik bodů těchto množin obdržíme pouhým dosazováním $k = 0$, ± 1 , ± 2, ...

$k=0$, $x_0 = \frac{1}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_1 $\qquad$ $x_0' = \frac{5}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_2
$k= 1$, $x_1 = \frac{3}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_3 $\qquad$ $x_1' = \frac{13}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_4
$k=2$, $x_2 = \frac{17}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_5 $\qquad$ $x_2' = \frac{7}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_6
⋮
$k=-1$, $\bar{x}_1 = -\frac{7}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_2' $\qquad$ $\bar{x}_1' = -\frac{1}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_1'
$k=-2$, $\bar{x}_2 = -\frac{5}{4}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_4' $\qquad$ $\bar{x}_2' = -\frac{11}{12}\pi$; v obr. 20 je to bod ξ_3'
⋮

240.**cvičení**. Určete lokální extrémy daných funkcí, případně i charakteristické body a náčrtek grafu funkce:

a) $y= \sin x + \cos x$ $\qquad$ $\left[\bar{V}/ \frac{\pi}{4}(8k+1), \sqrt{2} / , \underline{V}/ \frac{\pi}{4}(8k+5), -\sqrt{2} / \right]$

b) $y= \cos x + \operatorname{cotg} x$ $\qquad$ $\left[x= k\pi, | ^{+}; \nearrow J_1\left(\frac{\pi}{2}(4k+1),0\right); \searrow J_2\left(\frac{\pi}{2}(4k+3), 0\right) \right]$

DESÍTKA ÚLOH čís. 42

1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ $\qquad$ $\left[\bar{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{3}{2}\sqrt{3}\right); \underline{V}\left(\frac{\pi}{3}(6k+5), -\frac{3}{2}\sqrt{3} \right) \right]$

2) $y = \sin^2 x - 2\sin x$ $\qquad$ $\left[\bar{V}\left(\frac{\pi}{2}(4k+3), 3 \right) ; \underline{V}\left(\frac{\pi}{2}(4k+1), -1 \right) \right]$

3) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad$ $\left[\bar{V}\left(k\pi, (-1)^k + \frac{1}{2}\right) ; \underline{V}\left(\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1), -\frac{3}{4} \right) \right]$

4) $y = \cos^3x + \sin^3x$, [$\bar{V}(k\pi,1)$; $\bar{V}(\frac{\pi}{2}(2k+1),1)$; $\underline{V}(\frac{\pi}{4}(4k+1),\frac{\sqrt{2}}{2})$ pro k sudé
$\bar{V}(\frac{\pi}{4}(4k+1),-\frac{\sqrt{2}}{2})$; $\underline{V}(k\pi,-1)$; $\underline{V}(\frac{\pi}{2}(2k+1),-1)$ pro k liché]

5) $y = \sin^3x + \sin x$, [$\bar{V}(\frac{\pi}{2}(4k+1),2)$; $\underline{V}(\frac{\pi}{2}(4k+3),-2)$; $/J(k\pi, 0)$]

6) $y = 4\sin 2x + \mathrm{tg}x$, [$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), {}^{+}|_{-}$; $-\bullet J_1(\frac{\pi}{3}(3k+1),3\sqrt{3})$; $-\bullet J_2(\frac{\pi}{3}(3k+2),-3\sqrt{3})$;
$/J_3(k\pi,0)$]

7) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$
[$\bar{V}(\frac{\pi}{3}(6k+4),-\frac{\sqrt{3}}{4})$; $\bar{V}(\frac{\pi}{4}(8k+1),\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2})$; $\bar{V}(\frac{\pi}{4}(8k+3),\frac{-(3+4\sqrt{2})}{6})$;
$\underline{V}(\frac{\pi}{3}(6k+2),\frac{\sqrt{3}}{4})$; $\underline{V}(\frac{\pi}{4}(8k+7),\frac{-(3+4\sqrt{2})}{6})$; $\underline{V}(\frac{\pi}{4}(8k+5),\frac{3-4\sqrt{2}}{6})$]

8) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$
[$\bar{V}(2k\pi, \frac{11}{6})$; $\bar{V}(\frac{2}{3}\pi(3k+1),-\frac{5}{12})$; $\bar{V}(\frac{2}{3}\pi(3k+2),-\frac{5}{12})$;
$\underline{V}(\pi(2k+1),-\frac{5}{6})$; $\underline{V}(\frac{\pi}{2}(2k+1), -\frac{1}{2})$]

9) $y = \frac{10}{1+\sin^2x}$ [$\bar{V}(k\pi, 10)$; $\underline{V}(\frac{\pi}{2}(2k+1), 5)$; inflexní body řešením rovnice $2\sin^4x - 5\sin^2x + 1 = 0$]

10) $y = \sin x - \mathrm{tg}\,x$ [$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), {}_{-}|^{+}$; $\bar{V}(\frac{\pi}{3}(6k+1),4\sqrt{2}-\sqrt{3})$;
$\underline{V}(\frac{\pi}{3}(6k+5),-4\sqrt{2}+\sqrt{3})$]

II. Exponenciální funkce.

Při vyšetřování průběhu exponenciální funkce tvaru $y = a^{f(x)}$, $a > 0$, si uvědomujeme, že funkce má pro každé x kladné funkční hodnoty; proto

$$\text{pro žádné } x \text{ není } a^{f(x)} = 0$$

Poněvadž 1. a 2. derivace takové exponenciální funkce se dá uvést na tvar

$$a^{f(x)} \cdot F(x) ,$$

pak řešení rovnice $a^{f(x)} \cdot F(x) = 0$ přechází na řešení rovnice $F(x) = 0$.

V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh vyšetřete lokální extrémy , případně i charakteristické body a asymptoty grafu dané funkce. (U grafů některých funkcí existují inflexní body, ale výpočet jejich souřadnic je složitý)

241. cvičení.

a) $y = x.e^x$ [$\underline{V}(-1, -e^{-1})$; $/J(-2,-2e^{-2})$; asymptota $y = 0$, $_{-}\text{—}$]

b) $y = 2^{\frac{x}{1+x^2}}$ [$\bar{V}(1,\sqrt{2})$; $\underline{V}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$; exist. J_1, J_2, J_3; $y = 1$, $_{-}\text{—}^{+}$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 43

1) $y = 2^{-x^2}$, [$\bar{V}(0,1)$; $/J_1(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}, 2^{\frac{-1}{\ln 4}})$; $/J_2(\frac{-1}{\sqrt{\ln 4}}, 2^{\frac{1}{\ln 4}})$; $y = 0$, $_{-}\text{—}^{+}$]

2) $y = e^{-x^2}$, [$\bar{V}(0,1)$; $/J_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$; $/J_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$; $y = 0$, $_{-}\text{—}^{+}$]

			Asymptota:
3)	$y = e^{-x^{-2}}$,	[$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$; $/J_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$; $/J_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$;	$y = 1$, $\underline{\quad}^{+}$]
4)	$y = e^{\frac{1}{x}}$,	[$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$; $/J\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$;	$x = 0$, $\vert^{+}$; $y = 1$, $\underline{\quad}^{\pm}$]
5)	$y = e^{\frac{1}{x+2}}$,	[$x \neq -2$; $\lim\limits_{x \to -2-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to -2+} y = +\infty$; $/J\left(-2\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$;	$x = -2$, $\vert^{+}$; $y = 1$, $\underline{\quad}^{\pm}$]
6)	$y = 2^{\frac{1}{x-1}}$,	[$x \neq 1$; $\lim\limits_{x \to 1-} y = 0$; $/J\left(\frac{2-\ln 2}{2}, 2^{\frac{-2}{\ln 2}}\right)$;	$x = 1$, $\vert^{+}$; $y = 1$, $\underline{\quad}^{\pm}$]
7)	$y = \frac{1}{1+e^{x^{-1}}}$,	[$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 1$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = 0$;	$y = \frac{1}{2}$, $\overline{\quad}_{+}$]
8)	$y = x^2 . e^{-x}$,	[$\bar{V}(2, 4e^{-2})$; $\underline{V}(0,0)$; $/J_1(2+\sqrt{2}, y)$; $/J_2(2-\sqrt{2}, y)$;	$y = 0$, $\underline{\quad}^{\pm}$]
9)	$y = x . e^{x^{-1}}$,	[$x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$; $\underline{V}(1, e)$;	$x = 0$, $\vert^{+}$; $y = 1$, $\underline{\quad}^{\pm}$]
10)	$y = x . e^{\frac{-x^2}{2}}$,	[$\bar{V}\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\underline{V}\left(-1, \frac{-1}{\sqrt{e}}\right)$; $/J_1(0,0)$; $/J_2(\sqrt{3}, y)$; $J_3(-\sqrt{3}, y)$;	$y = 0$, $\underline{\quad}^{\pm}$]

III. Logaritmické funkce.

Derivace logaritmické funkce tvaru $y = \ln f(x)$ je funkcí tvaru $\frac{f'(x)}{f(x)}$.
Je-li vnitřní složka $f(x)$ racionální funkcí, pak řešení příslušných rovnic a nerovností není obtížné.
Často se setkáváme s rovnicí $\ln x = m$, jež je splněna pro $x = e^m$
nebo s nerovností $\ln x \gtrless m$, jež je splněna pro $x \gtrless e^m$.
Je však důležité zjistit předem definiční obor dané logaritmické funkce a přesvědčovat se, zda x, vypočítané pro lokální extrémy nebo pro charakteristické body grafu, náleží def. oboru funkce.
V příkladech následujícího cvičení a desítky úloh určiti lokální extrémy daných funkcí, případně charakteristické body a asymptoty grafu.

242. cvičení.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, [$x > 0$; $\underline{V}\left(1, \frac{1}{2}\right)$; $x = 0$, $\vert^{+}$;]

b) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$, [$x > 0$; $\underline{V}(1,0)$; $\bar{V}\left(e^2, \frac{4}{e^2}\right)$; $/J\left(e^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}, y\right)$; $x = 0$, $\vert^{+}$; $y = 0$, $\underline{\quad}^{+}$]

DESÍTKA ÚLOH čís. 44

1) $y = \sqrt{x} . \ln x$, [$x > 0$; $\underline{V}\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$; $/J(1,0)$]

2) $y = x . \ln x$, [$x > 0$; $\underline{V}\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$;]

3) $y = x^2 . \ln x$, [$x > 0$; $\underline{V}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)$; $/J\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$;]

4) $y = \frac{\ln x}{x}$, [$x > 0$; $\bar{V}\left(e, \frac{1}{e}\right)$; $/J\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$; $y = 0$, $\underline{\quad}^{+}$]

5) $y = \frac{1}{\ln x}$, [$x > 0$; $x \neq 1$; $/J\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$; $x = 1$, $\vert^{+}$; $y = 0$, $\underline{\quad}^{+}$]

6) $y = \ln(1+x^2)$, [$\underline{V}(0,0)$; /$J_1(1,\ln 2)$; /$J_2(-1,\ln 2)$; **Asymptoty:**]

7) $y = \ln(1-x^2)$, [Obor: $(-1,1)$; $\bar{V}(0,0)$; $x=-1$, |_ ; $x=1$, _|]

8) $y = \ln(x^2-1)$, [Obor: $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; $x=-1$, _| ; $x=1$, |_]

9) $y = x + \ln(x^2-1)$, [Obor: $(-\infty,-1),(1,+\infty)$; $\bar{V}(-1-\sqrt{2},y)$; $x=1$, L ; $x=-1$, _|]

10) $y = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$, [Obor: $(-1,1)$; /$J(0,0)$; $x=-1$, |_ ; $x=1$, ⁺|]

IV. Cyklometrické funkce.

U složených funkcí cyklometrických se setkáváme častěji s některými zvláštnostmi (singularitami), které se zřídka objevovaly u funkcí předešlých tříd. Tyto funkce mívají body nespojitosti I. druhu, jejich grafy mají body úhlové apod. Proto je opět důležité určovat definiční obor funkce a vyšetřovat obě okolí bodů, pro něž není funkce definována.

Příklad. $y = \arcsin\frac{1}{x}$ Def. obor : $(-\infty,-1\rangle$, $\langle 1,+\infty)$

Grafem funkce budou dva nekonečné oblouky s krajním bodem. První oblouk má krajní bod $K_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, druhý oblouk má krajní bod $K_2(1,\frac{\pi}{2})$.

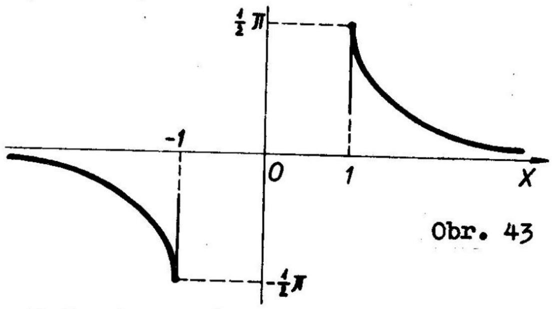
$$y' = \frac{-|x|}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}} \quad \begin{cases} \text{pro } x \geq 1 : \; y' = -\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}, & y'' = \dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \\ \text{pro } x \leq -1 : \; y' = \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}, & y'' = -\dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$

Obvyklé vyšetření průběhu dané funkce vede jen k asymptotě $y = 0$, $\overline{=\;\;\;+}$. Derivace funkce neexistuje pro $x=0$ a pro $x=\pm 1$. Okolí bodu 0 nevyšetřujeme, poněvadž funkce není v něm definována. Zkoumáme tedy jen derivaci v pravém okolí bodu 1 a v levém okolí bodu -1. Vypočtěte sami limity :

$$\lim_{x\to 1+}\frac{-1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1-}\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

V krajních bodech $K_1(-1,-\frac{\pi}{2})$, $K_2(1,\frac{\pi}{2})$ má graf svislé polotečny. Viz obr. 42[cd] .

Kontrolujte výpočty na grafu v obr. 43.



Obr. 43

Příklad. $y = \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$ Def. obor : $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

Grafem funkce jsou dva nekonečné oblouky bez krajního bodu.

V tomto případě můžeme užitím limity vyšetřovat okolí bodu $x=0$, poněvadž funkce není definována jen v tomto bodě.

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty}\operatorname{arccotg} t = \pi \;; \quad \lim_{x\to 0+}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty}\operatorname{arccotg} t = 0$$

Pro $x=0$ má daná funkce bod nespojitosti I. druhu (různé vlastní jednostranné limity)

Sami užijte derivací $y' = \frac{1}{x^2+1}$, $y'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ k obvyklému vyšetření funkce.

Asymptoty o směrnici k :

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = 0 \;; \quad q = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$. Asymptota $y=\frac{\pi}{2}$, $\overline{=\;\;\;+}$.

Pro sestrojení grafu funkce v okolí bodu $x=0$ volíme pomocnou funkci $y = \varphi(x)$

zvlášť pro levé okolí a zvlášť pro pravé okolí bodu x=0 tak,aby byla v tomto bodě definována :

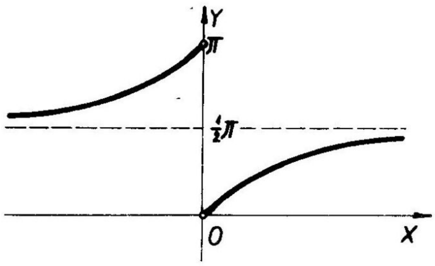
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in (-\infty,0) \\ \pi & \text{pro } x = 0 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Jednostranné derivace funkcí $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ v bodě x=0 :

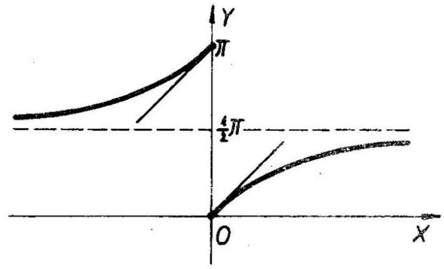
$$\lim_{x\to 0-} \varphi_1'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2+1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0+} \varphi_2'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2+1} = 1$$

V bodě $(0,\pi)$ má graf funkce $y=\varphi_1(x)$ polotečnu o směrnici $k = 1$.

V bodě $(0,0)$ má graf funkce $y=\varphi_2(x)$ polotečnu o směrnici $k = 1$.



Obr.44



Obr. 45

Příklad. $y = x.\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$. Def.obor : $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

$$y' = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} , \quad y'' = \frac{-2}{(x^2+1)^2}$$

Užijte derivací k obvyklému vyšetření průběhu funkce.(Grafické řešení rovnice $y'= 0$ by ukázalo,že neexistují reálná x,pro něž $y'= 0$.

Funkce má bod nespojitosti pro x=0.Vyšetřujeme jednostranné limity v tomto bodě:

$$\lim_{x\to 0-} x.\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0-} x.\lim \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = 0; \qquad \lim_{x\to 0+} x.\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x.\lim \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} = 0$$

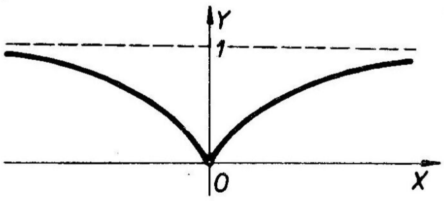
Poněvadž daná funkce má v bodě x=0 vlastní limitu,má pro x=0 nespojitost,kterou z různých důvodů odstraňujeme(odstranitelná nespojitost).Volíme opět pomocnou funkci $\varphi(x)$ takto definovanou :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

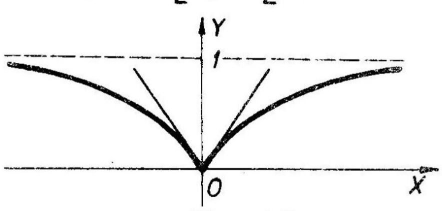
Jednostranné limity derivace funkce $\varphi(x)$ v bodě x=0 :

$$\lim_{x\to 0+} \left[\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} ; \qquad \lim_{x\to 0-} \left[\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] = -\frac{\pi}{2}$$

Jednostranné limity derivace funkce jsou vlastní a různé;bod (0,0) je úhlovým bodem $\dot{U}$ pomocné funkce $\varphi(x)$. Směrnice polotečen jsou $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$.



Obr. 46



Obr. 47

243.**cvičení**.

a) $y= \mathrm{arctg}\,\frac{2}{x-2}$,[x=2 je bod nesp.I.dr.;y=0,$\frac{+}{-}$; $\varphi(x)$:$k_t=-\frac{1}{2}$ v bodech $(2,-\frac{\pi}{2})$ $(2,\frac{\pi}{2})$]

b) $y= x.\mathrm{arctg}\,x$,[$\underline{V}(0,0)$;asymptoty:$y= \frac{\pi}{2}x-1$, $y= -\frac{\pi}{2}x-1$]

c) $y= x+\mathrm{arccotg}2x$,[$\underline{V}(\frac{1}{2},y\doteq 1,28)$;$\bar{V}(-\frac{1}{2},y\doteq 1,85)$;asymptota: y=x]

d) $y= \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$,[$\dot{U}(1,\frac{\pi}{2})$;$\underset{\bullet}{U}(-1,-\frac{\pi}{2})$; $k_t= \pm 1$; /J(0,0);asympt. y=0, $\frac{+}{-}$]