

# MA0004 Matematická analýza 1, 2. seminář

8. 3. 2021

## 1 Hromadné body posloupnosti

## 2 Limita funkce

### Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
- \* Samková, L. *Materiály k výuce v zimním semestru - Matematická analýza 3*. 2019. Dostupné zde:  
<http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma3.htm>
- # Voldánová, A. *Posloupnosti a jejich hromadné body*. Bakalářská práce, 2007. Dostupné zde:  
[https://is.muni.cz/th/150974/prif\\_b/](https://is.muni.cz/th/150974/prif_b/)

# Hromadné body posloupnosti

**Příklad 1:** Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Čas na rešerši: 3 minuty.

# Hromadné body posloupnosti

**Příklad 1:** Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Čas na rešerši: 3 minuty.

## Vybraná podposloupnost a hromadný bod

**Definice:** Necht'  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupnost a necht'  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  se nazývá **vybraná podposloupnost** z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Definice:** Číslo  $a \in \mathbb{R}^*$  se nazývá **hromadný bod** posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jestliže pro každé okolí  $O(a)$  existuje nekonečně mnoho indexů  $n \in \mathbb{N}$ , pro které platí, že  $a_n \in O(a)$ .

**Věta:** Číslo  $a \in \mathbb{R}^*$  je hromadným bodem posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  taková, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

**Příklad 2:** Najděte všechny hromadné body daných posloupností a určete limitu superior a limitu inferior daných posloupností:

(a)  $a_n = (-1)^{n+3}$

(b)  $a_n = (-2)^n$

(c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

(d)  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+1}$

(e)  $a_n = \operatorname{tg} \left( (2n+1) \cdot \frac{\pi}{4} \right)$

(f)  $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

(g)  $a_n = \sin \left( n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

(h)  $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$

(i)  $a_n = 5 + 4 \cdot \cos \left( n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

(j)  $a_n = 5 + 4 \cdot \cos^n \left( n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

## Výsledky Příkladu 2

- (a)  $H(a_n) = \{-1, 1\}$ ,  $\liminf a_n = -1$ ,  $\limsup a_n = 1$
- (b)  $H(a_n) = \{-\infty, \infty\}$ ,  $\liminf a_n = -\infty$ ,  $\limsup a_n = \infty$
- (c)  $H(a_n) = \{0, 1\}$ ,  $\liminf a_n = 0$ ,  $\limsup a_n = 1$
- (d)  $H(a_n) = \{-2, 2\}$ ,  $\liminf a_n = -2$ ,  $\limsup a_n = 2$
- (e)  $H(a_n) = \{-1, 1\}$ ,  $\liminf a_n = -1$ ,  $\limsup a_n = 1$
- (f)  $H(a_n) = \{0, 1, 2\}$ ,  $\liminf a_n = 0$ ,  $\limsup a_n = 2$
- (g)  $H(a_n) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ ,  $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\limsup a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (h)  $H(a_n) = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ ,  $\liminf a_n = -\frac{1}{2}$ ,  $\limsup a_n = 1$
- (i)  $H(a_n) = \{1, 3, 7, 9\}$ ,  $\liminf a_n = 1$ ,  $\limsup a_n = 9$
- (j)  $H(a_n) = \{1, 5, 9\}$ ,  $\liminf a_n = 1$ ,  $\limsup a_n = 9$

**Příklad 3:** Limita funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  tj.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  může být různého typu, známe tyto případy:

- (a) Vlastní limita ve vlastním bodě
- (b) Vlastní limita v nevlastním bodě
- (c) Nevlastní limita ve vlastním bodě
- (d) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarády, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2+5}$

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$

Typy limit napište v Socrative (stačí, aby tak učinil jeden z vás).