MA0004 Matematická analýza 1, 8. seminář

19. 4. 2021

Náplň cvičení

1. Přibližné vyjádření funkce
   - Diferenciál
   - Taylorův polynom

Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I.* Brno, 2012. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552
- Ústav matematiky, FSI VUT Brno. *MATEMATIKA online – Matematika I.* Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx

Diferenciál

Diferenciál

Věta 26: Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná v x_0) právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Přitom platí

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

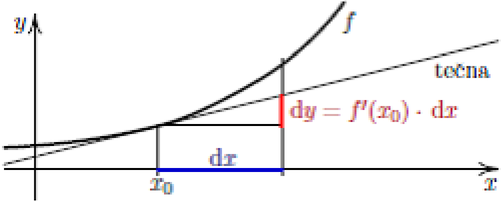
Píšeme též $df(x) = f'(x)dx$. Pro dostatečně malé h platí:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ pro } x \to x_0.$$

Poznámka:

- Proměnnou $h = dx = x - x_0$ nazýváme přírůstek proměnné x.
- Diferenciál funkce f v bodě x_0 zapisujeme výrazem $df(x_0)(h)$.
- Pomocí diferenciálu lze aproximovat hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x blízkém bodu x_0, pro který snadno spočítáme funkční hodnotu $f(x_0)$ i hodnotu 1. derivace $f'(x_0)$. Čím větší hodnotu má přírůstek $h = dx = x - x_0$, tím méně přesná bude aproximace.

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 6.7: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

- Modrá úsečka je přírůstek $dx = x - x_0$ proměnné x.
- Červená úsečka dy je "přírůstek na tečně" t k funkci f v bodě x_0, tj. o kolik větší/menší je hodnota $t(x)$ v porovnání s $t(x_0) = f(x_0)$.
- Obě úsečky svírají pravý úhel v pravoúhlém trojúhelníku. Úhel α naproti červené úsečce je stejný jako úhel, který tečna svírá s osou x. Tangens úhlu α je směrnicí tečny t. Platí pro něj $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$.
- Pro dy platí: $dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = f'(x_0) \cdot dx$ (rovnice pro diferenciál). Délka červené úsečky vyjadřuje diferenciál funkce f v bodě x_0.

Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a) $\sin 29^{\circ}$

b) $\sqrt{80}$

c) $\log 11$

d) $\operatorname{arctg} 1,1$

e) $\sqrt[3]{70}$

f) $\cos 151^{\circ}$

g) $2^{1{,}003}$

h) $\ln 1,1$

Diferenciál – příklady

Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a) $\sin 29^{\circ}$
b) $\sqrt{80}$
c) $\log 11$
d) $\operatorname{arctg} 1,1$
e) $\sqrt[3]{70}$
f) $\cos 151^{\circ}$
g) $2^{1,003}$
h) $\ln 1,1$

Výsledky: a) 0,484885; b) 8,9445; c) 1,0434294; d) 0,83539; e) 4,125; f) $-0,874752$; g) 2,004; h) 0,1

Taylorův polynom

Taylorova věta

Věta 27: Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí tzv. Taylorův vzorec:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

kde chyba $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ se nazývá zbytek a ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Poznámka:

- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*.
- Pokud v Taylorově větě položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. Maclaurinův vzorec, resp. tzv. *Maclaurinův polynom*.

Taylorův polynom – příklady

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1$
b) $f(x) = e^x,\ x_0 = 1$
c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$
e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x_0 = 0$
f) $f(x) = e^x \cdot \sin x,\ x_0 = 0$

Taylorův polynom – příklady

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1$
b) $f(x) = e^x,\ x_0 = 1$
c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$
e) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x_0 = 0$
f) $f(x) = e^x \cdot \sin x,\ x_0 = 0$

Výsledky:

a) $1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$
b) $e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$
c) $x - \frac{x^3}{3!}$
d) $1 - \frac{x^2}{2!}$
e) $1 - \frac{x^2}{2}$
f) $x + x^2 + \frac{x^3}{3}$