MA0004 Matematická analýza 1, 9. seminář

26. 4. 2021

Náplň cvičení

1. Diferenciální počet funkcí více proměnných
   - Definiční obor
   - Limita funkce dvou proměnných
   - Spojitost funkce dvou proměnných

Literatura a použité zdroje

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z: `homel.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf`
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf`
- Klaška J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných.* Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z: `http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021`

Literatura a použité zdroje

- Kuráňová S., Vondra J. *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek.* Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2009. Dostupné z: `https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html`
- Kadeřábek Z. *Limity funkcí více proměnných.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2007. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/xpb8v/Limity_funkci_vice_promennych.pdf`
- isibalo.com. *Matematika: Diferenciální počet funkcí více proměnných.* 2020. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/diferencialni-pocet-funkci-vice-promennych`

Funkce více proměnných

Definice: Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina M se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $D(f)$.

Poznámka:

- V případě $n = 2$ hovoříme (reálné) funkci dvou (reálných) proměnných x, y. Každé uspořádané dvojici $[x, y] \in D(f)$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$ takové, že $z = f(x, y)$.
- Pokud je funkce zadána předpisem $z = f(x, y)$ a není udaný definiční obor funkce, pak definičním oborem rozumíme množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro které tento předpis má smysl.
- Stanovení definičního oboru zadané funkce dvou proměnných bude častým úkolem. Kromě symbolického předpisu je možné definiční obor popsat i zakreslením příslušné oblasti v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y).

Definiční obor funkce dvou proměnných

Příklad 1: Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y).

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$

b) $f(x, y) = \ln(x \cdot \ln(y - x))$

c) $f(x,\ y) = \sqrt{(1 - \ln y) \cdot \ln(-x)}$

d) $f(x, y) = \ln\left(x^2 - y\right) + \sqrt{x - 2y + 4}$

e) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$

f) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

g) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 6x)}$

h) $f(x,\ y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$

Příklad 1 – výsledky

a) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 2 \wedge |y| \geq 3\}$

b) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ (x > 0 \wedge y > x+1) \vee (x < 0 \wedge y < x+1 \wedge y > x)\}$

c) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ (0 < y \leq e \wedge x \leq -1) \vee (y > e \wedge -1 \leq x < 0)\}$

d) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2\}$

e) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ (x > 0 \wedge y > -2x^2) \vee (x < 0 \wedge y < -2x^2)\}$

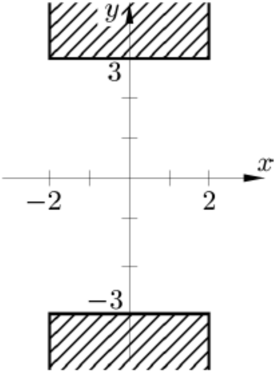
f) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ -1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$

g) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 6x \geq 0\right) \vee \left(\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 6x \leq 0\right)\}$

h) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ y^2 \geq -x, y^2 \geq x, y \in (0, 2\rangle\}$

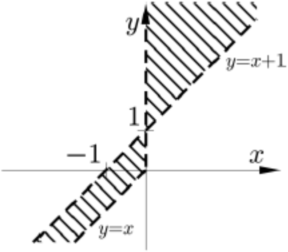
Zobrazení definičních oborů v rovině (O, x, y) najdete na následujících slajdech.

Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



Obr. 1

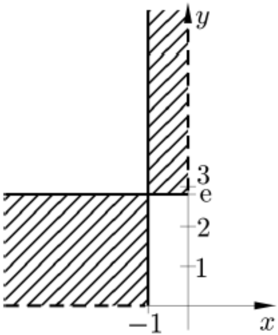
a)



Obr. 2

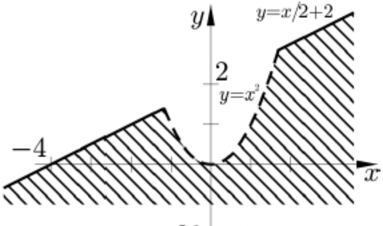
b)

Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



Obr. 4

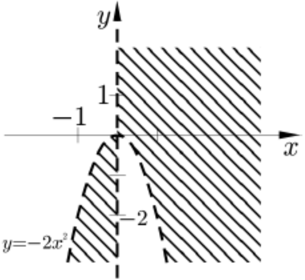
c)



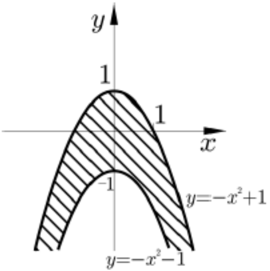
Obr. 5

d)

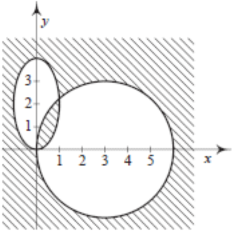
Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



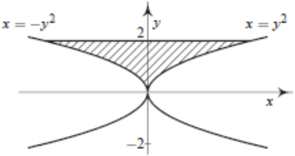
e) Obr. 6



f) Obr. 7



g)

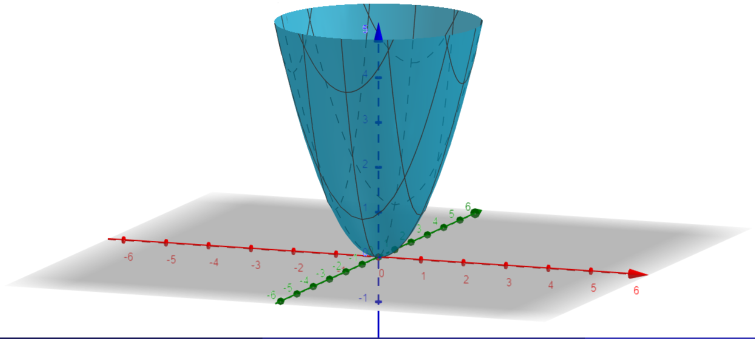


h)

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$, pro které $[x, y]$ patří do definičního oboru $D(f)$.

Graf funkce $z = x^2 + y^2$ vykresleného nástrojem Geogebra 3D grafy:



Limita funkce dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body z ryzího δ-okolí bodu M platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = L.$$

Poznámka:

- U funkcí více proměnných nemáme k dispozici L'Hospitalovo pravidlo.
- Postupujeme podobně jako u výpočtu limit z funkcí jedné proměnné: nejdříve dosadíme limitní bod do předpisu funkce. Pokud výraz nelze vyčíslit, hledáme jeho vhodnou úpravu tak, abychom jej zjednodušili a mohli dosadit do pozměněného výrazu.
- Platí stejná aritmetika limit pro součet, rozdíl, součin a podíl dvou výrazů jako u limit funkcí jedné proměnné.

Při výpočtu se může hodit tato věta:

Věta o součinu s ohraničenou funkcí

Věta: Nechť $\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0; y_0]$. Pak

$$\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0.$$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(2,\ 2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$

d) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

e) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

a) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(2,\ 2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$

d) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)} \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

e) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$

Výsledky:

a) $\ln 2$, b) 0, c) $\frac{3}{8}$, d) 12, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{4}{5}$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

g) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy^2 \cdot \cos \frac{1}{xy^2}$

h) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x \cdot \sin \frac{1}{y}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ 2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

g) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} xy^2 \cdot \cos \frac{1}{xy^2}$

h) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x \cdot \sin \frac{1}{y}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ 2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

Výsledky:

g) 0, h) 0, i) 0, j) 0, k) 2, l) 2

Důkaz neexistence limity

- V případě funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu blížíme po přímce $y = 0$, u funkcí dvou proměnných se k němu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby, po různých přímkách, parabolách atd.
- Existence limity v daném bodě znamená, že **nezáleží na cestě**, po které se k danému bodu blížíme. Dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě nemůže existovat.
- Uvedeme si několik způsobů, jak ukázat, že v zadaném bodě limita funkce neexistuje.

Metoda postupných limit

Věta: Označme

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1, \quad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x,y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Poznámka: Tato věta je implikací, takže slouží pouze jako metoda důkazu neexistence limity. Pokud ukážeme, že $L_1 \neq L_2$, pak to znamená, že limita nemůže existovat.

Přibližování po různých cestách

K limitnímu bodu $[x_0, y_0]$ se můžeme přibližovat po

- po přímkách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$, přičemž počítáme limitu pro $x \to x_0$,
- po parabolách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0)^2 + y_0$, přičemž opět počítáme limitu pro $x \to x_0$,
- po kružnicích pomocí polárních souřadnic, substitucí $x = x_0 + \varrho \cdot \cos\varphi, y = y_0 + \varrho \cdot \sin\varphi$, přičemž počítáme limitu pro $\varrho \to 0$,
- či po jiných obecných cestách.

Poznámka: Pokud po volbě nějaké cesty a následné substituci vyjde limita závislá na parametru k či pouze na φ, znamená to, že volba těchto parametrů mění hodnotu limity – tedy limita neexistuje.

V opačném případě (výsledek limity nezávisí na těchto parametrech) není existence limity prokázána!

Polární souřadnice – univerzální cesta

Transformace do polárních souřadnic

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \varrho \cdot \cos\varphi, \\
y &= y_0 + \varrho \cdot \sin\varphi,
\end{aligned}
$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod a $\varrho > 0$, je možností, jak ukázat i existenci limity a spočítat její výsledek. Platí následující lemma:

Lemma pro výpočet limity pomocí polárních souřadnic

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru
$f(x,y) = L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi),\ L \in \mathbb{R}$, kde

i) $\lim_{\varrho \to 0} g(\varrho) = 0$,

ii) $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, \varrho_0\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, kde $\varrho_0 > 0$.

Pak platí $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L$.

Polární souřadnice – univerzální cesta

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru
$f(x, y) = L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi),\ L \in \mathbb{R}$, kde

i) $\lim_{\varrho \to 0} g(\varrho) = 0$,

ii) $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, \varrho_0\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, kde $\varrho_0 > 0$.

Pak platí $\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x, y) = L$.

Postup hledání limity pomocí lemmatu

1. Transformujeme limitní výraz do polárních souřadnic.
2. Počítáme limitu pro $\varrho \to 0$.
3. Výsledkem může být výraz $L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi)$, kde $g(\varrho)$ je funkce závislá pouze na ϱ, jejíž limita pro ϱ jdoucí k nule je 0, a $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená funkce. Pak je limita rovna zbylému reálnému číslu L, které samozřejmě může být i nula.
4. Je-li výsledkem je pouze funkce $h(\varrho, \varphi)$ závislá na obou parametrech či pouze na φ, pak limita neexistuje.

Limita funkce dvou proměnných

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Výsledky:

a) neex., b) neex., c) neex., d) neex., e) 0, f) neex.

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

g) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^2}{x^2+y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

g) $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^2}{x^2+y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Výsledky:
g) neex., h) 0, i) neex., j) neex.

Spojitost funkce dvou proměnných

Spojitá funkce dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Poznámka:

1. Nalézt body nespojitosti funkce znamená určit body, v nichž není funkce definovaná.
2. Domluvme se, že funkce je spojitá v izolovaných bodech definičního oboru.

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,\ y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y}$

d) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

f) $f(x, y) = \ln \left|1 - x^2 - y^2\right|$

Spojitost funkce dvou proměnných

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x,\ y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y}$

d) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

f) $f(x, y) = \ln \left|1 - x^2 - y^2\right|$

Výsledky:

a) $[0, 0]$, b) $\{[x,\ y]\,; x = -y\}$, c) $\{[x,\ y]\,; x = -y\}$,
d) $\{[x,\ y]\,; x = 0 \vee y = 0\}$, e) $\{[x,\ y]\,; x = k\pi,\ y = k\pi,\ k \in N\}$,
f) $\left\{[x,\ y]\,; x^2 + y^2 = 1\right\}$