Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

4. pomocí polárních souřadnic – přibližování po kružnicích:

$$x = x_0 + \rho\cdot\cos\varphi = 0 + \rho\cos\varphi = \rho\cos\varphi$$
$$y = y_0 + \rho\cdot\sin\varphi = 0 + \rho\sin\varphi = \rho\sin\varphi$$

$[x_0, y_0]$ limitní bod

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cdot\cos\varphi - 2\cdot\rho\cdot\sin\varphi}{3\cdot\rho\cdot\cos\varphi + \rho\sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}(\cos\varphi - 2\cdot\sin\varphi)}{\cancel{\rho}\cdot(3\cos\varphi + \sin\varphi)} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\varphi - 2\sin\varphi}{3\cos\varphi + \sin\varphi} \Big\} \to$$ výraz závisející pouze na φ $\Rightarrow$ limita dopadne pokaždé jinak $\Rightarrow$ limita neex.

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

a) přímkami

$y = kx$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot(1+k)}{x\cdot(1-k)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k} \to$ výraz závislý pouze na k $\Rightarrow$ limita neex.

b) postupnými limitami:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1 \\ L_2 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} L_1 \neq L_2 \Rightarrow \text{limita neex.}$$

c) polár. souřadnicemi

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

výsledek závisí pouze na φ $\Rightarrow$ limita neex.

d) parabolami, $y = kx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\cancel{x}(1+kx)}{\cancel{x}\cdot(1-kx)}}$$

závislý na k a x

↓

nedokážeme rozhodnout o neexistenci limity.

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Polárními souřadnicemi:

$x = x_0 + \rho\cos\varphi = \rho\cdot\cos\varphi$

$y = y_0 + \rho\sin\varphi = \rho\cdot\sin\varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0} \frac{\rho^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\cdot\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to0}\frac{\cancel{\rho^3}^{1}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}{\cancel{\rho^2}\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}}$$

$$= \lim_{\rho\to0} \rho\,\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi + 0 \leftarrow L$$

$g(\rho)$

ohraničená od -1 do 1

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru
$f(x,y) = L + g(\varrho)\cdot h(\varrho,\varphi)$, $L\in\mathbb{R}$, kde
i) $\lim_{\varrho\to0} g(\varrho) = 0$,
ii) $h(\varrho,\varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0,\varrho_0\rangle\times\langle0,2\pi\rangle$, kde $\varrho_0>0$.
Pak platí $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L$.

$= 0$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

Polárními souřadnicemi:

$x = x_0 + \rho\cdot\cos\varphi = \rho\cdot\cos\varphi$

$y = y_0 + \rho\cdot\sin\varphi = \rho\cdot\sin\varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\varphi\cdot\rho^3\cdot\sin^3\varphi}{\rho^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to0}\frac{\cancel{\rho^6}^{4}\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi}{\cancel{\rho^2}\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$

$$= \lim_{\rho\to0} \rho^4\,\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 0 = \underline{\underline{0}}$$

$g(\rho)$ → $\lim_{\rho\to0} g(\rho) = 0$

$h(\rho,\varphi)$ → fce ohraničená mezi -1 a 1

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

a) po přímkách:

$[x_0, y_0] = [0,0]$

$y = kx$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + \underbrace{(kx)^2}_{k^2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot kx}{\cancel{x^2} \cdot (x^2+k^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2}$

→ nedokazuje neexistenci limity

b) postupné limity:

$L_1 = \lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

$L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$

$L_1 = L_2$

tento výsledek nic nedokazuje

nedokážeme rozhodnout o neexistenci limity

c) parabolami:

$y = kx^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + \underbrace{(kx^2)^2}_{k^2x^4}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4} \cdot k}{\cancel{x^4} \cdot (1+k^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$ → výsledek závislý pouze na k ⇒ limita neex.

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

e) $f(x,y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

$\underbrace{\sin x = 0 \lor \sin y = 0}_{\text{Fce není spojitá}}$

Body nespojitosti: $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x = k\pi \text{ nebo } y = l\pi, k, l \in \mathbb{Z}\}$

Příklad 1: Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

e) $z = x \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right)$

$$z'_x = \left[x \cdot \ln(x^2 - y^2)\right]'_x = x' \cdot \ln(x^2 - y^2) + x \cdot \left[\ln(x^2 - y^2)\right]'_x$$

konst.

$$= 1 \cdot \ln(x^2 - y^2) + x \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x$$

$$= \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - y^2}$$

$$z'_y = \left[x \cdot \ln(x^2 - y^2)\right]'_y = x \cdot \left[\ln(x^2 - y^2)\right]'_y = x \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y)$$

konst. konst.

$$= -\frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Příklad 2: Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce v bodě A:

a) $f(x, y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1 + x^2}$, $A = [2, 5]$

$$f'_x = 0 + y \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'_y = 2y + \sqrt{1+x^2}$$

$$f'_x(2,5) = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$f'_y(2,5) = 2 \cdot 5 + \sqrt{1+2^2} = 10 + \sqrt{5}$$