Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

b) $z = \frac{xy+x}{y} = \frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}} + \frac{x}{y} = x + \frac{x}{y}$

$z'_x = 1 + \frac{1}{y} \cdot [x]'_x = 1 + \frac{1}{y}$

$z'_y = [x + \frac{x}{y}]'_y = x \cdot [y^{-1}]'_y = x \cdot (-1) \cdot y^{-2} = -\frac{x}{y^2}$

konst.

$z''_{xx} = (1 + \frac{1}{y})'_x = 0$

konst.

$z''_{xy} = (1 + y^{-1})'_y = (-1) \cdot y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$

$z''_{yx} = [x \cdot \underbrace{(-y^{-2})}_{\text{konst.}}]'_x = -\frac{1}{y^2} \cdot [x]'_x = -\frac{1}{y^2}$

$z''_{yy} = [\underbrace{x}_{\text{konst.}} \cdot (-y^{-2})]'_y = x \cdot (-(-2) \cdot y^{-3}) = \frac{2x}{y^3}$

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

$z'_x = 2x + y - 3y^3$

$z'_y = x - 9xy^2$

$z''_{xx} = 2$

$z''_{xy} = 1 - 9y^2$

$z''_{yx} = 1 - 9y^2$

$z''_{yy} = -18xy$

Příklad 1: Spočtěte totální diferenciál funkce f v obecném bodě $[x, y]$.

c) $f(x,y) = x^y$ konst.

$f'_x = [x^y] = y \cdot x^{y-1}$

$f'_y = [x^y]'_y = x^y \cdot \ln x$

konst.

$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$

$x - x_0$

$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy =$

$y - y_0$

$= y_0 \cdot x^{y_0 - 1} \cdot dx + x_0^{y_0} \cdot \ln x_0 \cdot dy$

Příklad 2: Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané dx, dy.

$[x_0, y_0]$

b) $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = [3, 4]$, $dx = 0,1$, $dy = 0,2$

$[3,1 ; 4,2]$

$f'_x = 1 - [(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]'_x$

$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$

$= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow f'_x(3,4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$f'_y = 1 - [(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]'_y = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}y$

$= 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow f'_y(3,4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$df(3,4) = \frac{2}{5} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{50} + \frac{2}{50} = \frac{4}{50} = \underline{\underline{\frac{2}{25}}}$

Příklad 3: Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a) $\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95}$

$$f(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} \qquad f(x_0, y_0) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$[x_0, y_0] = [1,1] \longrightarrow dx = 0{,}02,\quad dy = -0{,}05$$

$$\mathrm{arctg}\,\frac{1{,}02}{0{,}95} \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k$$

$$= \mathrm{arctg}\,1 + f'_x(1,1)\cdot 0{,}02 + f'_y(1,1)\cdot(-0{,}05)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{100}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{200} + \frac{5}{200} = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{200} \doteq 0{,}82$$

$0{,}035$

$$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} \longrightarrow f'_x(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) \longrightarrow f'_y(1,1) = -\frac{1}{2}$$

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vzorec pro tečnou rovinu:

$$\tau: z = \underbrace{f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)}_{} + \underbrace{f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{} + \underbrace{f(x_0,y_0)}_{}.$$

$$z = (-1)\cdot\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = -x - y + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$z = -x - y + \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Vzorec pro normálu:

$(x,y,z) = (x_0 + t\cdot f_x(x_0,y_0), y_0 + t\cdot f_y(x_0,y_0), z_0 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$n: x = \frac{1}{\sqrt{3}} + t\cdot(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} - t$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} + t\cdot(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} - t$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} - t$$

$$f'_x = \left[\left(1-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'_x = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = -1$$

$$f'_y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}} = -1$$

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

b) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2, \; [x_0, y_0, \; z_0] = [1; 1; 4]$

$f'_x = 2x + y \longrightarrow f'_x(1,1) = 2 + 1 = 3$

$f'_y = 4y + x \longrightarrow f'_y(1,1) = 4 + 1 = 5$

tečná rovina:

$\tau: \quad z = 3\cdot(x-1) + 5\cdot(y-1) + 4$

$z = 3x + 5y - 4$

normála:

$n: \quad x = 1 + 3t$

$y = 1 + 5t$

$z = 4 - t$

Příklad 5: Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

d) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$

$$f'_x = 3x^2 + y^2 - 2y - 5$$
$$f'_y = 2xy - 2x$$

1. Stacionární body:

$$3x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$$
$$2xy - 2x = 0 \quad /:2$$

$$xy - x = 0$$
$$x \cdot (y-1) = 0$$

$x = 0$

$$3 \cdot 0^2 + \underbrace{y^2 - 2y - 5}_{} = 0$$
$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 24$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \begin{cases} 1-\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \end{cases}$$

$S_1[0, 1-\sqrt{6}]$

$S_2[0, 1+\sqrt{6}]$

$y = 1$

$$3x^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 5 = 0$$
$$3x^2 - 6 = 0$$
$$3x^2 = 6 \quad /:3$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

$S_3[-\sqrt{2}, 1]$

$S_4[\sqrt{2}, 1]$

2. Parciální derivace 2. řádu:

$$f''_{xx} = [3x^2 + y^2 - 2y - 5]'_x = 6x$$
$$f''_{xy} = [3x^2 + y^2 - 2y - 5]'_y = 2y - 2$$
$$f''_{yx} = [2xy - 2x]'_x = 2y - 2$$
$$f''_{yy} = [2xy - 2x]'_y = 2x$$

3. Determinant Hessovy matice:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy} \cdot f''_{yx}$$
$$= 6x \cdot 2x - (2y-2)^2$$
$$= 12x^2 - (2y-2)^2$$

$S_1[0, 1-\sqrt{6}]$: $12 \cdot 0^2 - (2 \cdot (1-\sqrt{6}) - 2)^2 < 0 \to S_1$ sedlo

$S_2[0, 1+\sqrt{6}]$: $12 \cdot 0^2 - (2 \cdot (1+\sqrt{6}) - 2)^2 < 0 \to S_2$ sedlo

$S_3[-\sqrt{2}, 1]$: $12 \cdot (-\sqrt{2})^2 - (2 \cdot 1 - 2)^2 = 24 > 0 \to S_3$ lok. extrém

$f''_{xx}(-\sqrt{2}, 1) = 6 \cdot (-\sqrt{2}) < 0 \to S_3$ lok. maximum

$S_4[\sqrt{2}, 1]$: $12 \cdot (\sqrt{2})^2 - (2 \cdot 1 - 2)^2 = 24 > 0 \to S_4$ lok. extrém

$f''_{xx}(\sqrt{2}, 1) = 6 \cdot \sqrt{2} > 0 \to S_4$ lok. minimum