Příklad 1: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

(a) $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{-1}{2},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{20},\ -\frac{1}{30},\ \dots$$

Hypotéza: a_n je rostoucí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{-1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{-n} + \cancel{n} + 2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)} > 0$$

Z toho vyplývá, že $\{a_n\}$ je rostoucí, a tedy monotónní.

Příklad 2: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \dots$$

Hypotéza: posl. je omezená, určitě shora číslem 2.

Ukážeme, že posloupnost je klesající:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n\cdot(n+2) - (n+1)^2}{n\cdot(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+2n-(\cancel{n^2}+2n+1)}{n\cdot(n+1)} = -\frac{1}{n\cdot(n+1)} < 0$$

$$\frac{n+1}{n} \leq 2$$

$\vdots$

Řeš.: $n \geq 1$

2. způsob

Posloupnost je klesající, tím pádem je omezená shora $a_1 = 2$.

Posl. $\{a_n\}$ je omezená zdola číslem 1, což lze ukázat výpočtem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$.

Příklad 3c: Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$ zadaných posloupností:

(a) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2+1}$

(b) $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+1}$

(c) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n+1}$

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+1}{n^2}}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{ve jmenovateli člen s nejvyšší mocninou}}$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}} = \left[\frac{\infty+0}{2+0}\right] = \left[\frac{\infty}{2}\right] = \underline{\underline{\infty}}$$