**Příklad 1:** Určete intervaly monotonie a lokální extrémy pro následující funkce.

e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$ $\rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left[(x^4-1)^{2/3}\right]' = \frac{2}{3}\cdot(x^4-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 4x^3$$

$$= \frac{8x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^4-1}}$$

$8x^3 \rightarrow 0$

$$x^4-1=0$$
$$(x^2-1)(x^2+1)=0$$
$$1, -1$$
$$D(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$f'(0) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} - & -1 & + & 0 & - & 1 & + \end{array}$$

1. derivace neexistuje

klesající pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

rostoucí pro $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

lokální minima: $x = -1, x = 1$

lokální maximum: $x = 0$

Lokálním extrémem je bod, ve kterém je funkce definovaná a ve kterém se mění z rostoucí na klesající či naopak.

Může to být bod, ve kterém
1. je první derivace rovna 0,
2. nebo ve kterém první derivace neexistuje.

**Příklad 1:** Určete intervaly monotonie a lokální extrémy pro následující funkce.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $D(f) = R$

$$\frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x > 0$$

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(2x - x^2) = e^{-x}\cdot x\cdot(2-x)$$

$x \rightarrow 0$, $(2-x) \rightarrow 2$

$$\begin{array}{ccccc} - & 0 & + & 2 & - \end{array}$$

lok. minimum (0) lok. maximum (2)

$\rightarrow$ klesající pro $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

rostoucí pro $x \in (0, 2)$

**Příklad 2:** Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

d) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2), \quad D(f) = D(f') = R$

$\cap$ – konkávní tvar – graf zatáčí doprava
– tečna nad grafem

$\cup$ – konvexní tvar. – graf zatáčí doleva
– tečna pod grafem

$$f''(x) = \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1-x^2)\right]' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}x \cdot (1-x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left[-x \cdot (1-x^2) - 2x\right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left[-3x + x^3\right]$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{(x^2-3)}_{}$$

$x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 3$
$x = \pm\sqrt{3}$

| $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | $-\sqrt{3}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\sqrt{3}$ | $+$ |

inflexní body

konkávní pro
$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
konvexní pro
$x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Inflexním bodem je bod, ve kterém je funkce f definovaná a v němž se mění z konvexní na konkávní či naopak.
Inflexním bodem může být bod, ve kterém
1. druhá derivace je rovna 0,
2. nebo druhá derivace neexistuje.

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3, \ D(f) = R$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24 = 12 \cdot (x^2 - x - 2) = 12 \cdot \underbrace{(x-2)}_{2}\underbrace{(x+1)}_{-1}$$

| $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $-1$ | $-$ | $2$ | $+$ |

inflexní body

konvexní pro
$x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
konkávní pro $x \in (-1, 2)$

$$f'(-1) = -4 - 6 + 24 + 7 = 21$$
$$f'(2) = 32 - 24 - 48 + 7 = -33$$

směrnice tečen v inflexních bodech

**Příklad 3:** Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ $\longrightarrow$ $\ln x \neq 0 \quad \wedge \quad x > 0$

$x \neq 1 \quad \wedge \quad x > 0$

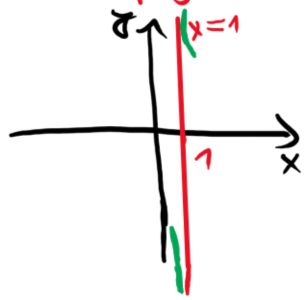
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}}$$

bod nespojitosti

asymptota bez směrnice: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{\text{malé záporné číslo}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{\text{malé kladné číslo}}\right] = \infty$$




**Příklad 4:** Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $D(f) = R - \{1\}$

$y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{\underbrace{x \cdot (x-1)}_{1x^2 - x}} = 3$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 3x \cdot (x-1)}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2} + 3x}{1x - 1} = 3$$

$$\boxed{y = 3x + 3}$$

**Příklad 6:** Vyšetřete průběh následujících funkcí a načtrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$, $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \underbrace{\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}}_{\text{body nespojitosti}}$

$3 - x^2 \neq 0$

$3 \neq x^2$

$\pm\sqrt{3} \neq x$

2. $f(-x) = \frac{-x}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -\frac{x}{3-x^2} = -f(x)$

lichá funkce

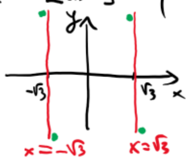
3. vyšetřování bodů nespojitosti

$\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = \infty$

$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = -\infty$

$\lim_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = \infty$

$\lim_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = -\infty$




4. $F(x) = 0$

$\frac{x}{3-x^2} = 0$

| graf nad osou x | | graf pod osou x | | nad osou x | | pod osou x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | $-\sqrt{3}$ | − | 0 | + | $\sqrt{3}$ | − |

.....pokračování příští týden