Příklad 6: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načtrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x)=\frac{x}{3-x^2}$, $f'(x)=\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{2x\left(9+x^2\right)}{(3-x^2)^3}$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \underbrace{\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}}_{\text{body nespojitosti}}$

$3 - x^2 \neq 0$

$3 \neq x^2$

$\pm\sqrt{3} \neq x$

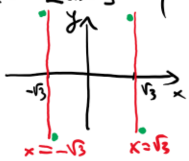
2. $f(-x) = \frac{-x}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -\frac{x}{3-x^2} = -f(x)$

lichá funkce

3. vyšetřování bodů nespojitosti

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = \infty$ | $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = -\infty$



4. $f(x) = 0$

$\frac{x}{3-x^2} = 0$

graf nad osou x | graf pod osou x | nad osou x | pod osou x

$+ \quad -\sqrt{3} \quad - \quad 0 \quad + \quad \sqrt{3} \quad -$

....pokračování příští týden

5. $f'(x) = \frac{\overbrace{3+x^2}^{>0}}{\underbrace{(3-x^2)^2}_{>0}}$

$\nearrow$

$+$

Pro $\forall x \in D(f)$ funkce bude mít rostoucí graf

6. $f''(x) = \frac{\overbrace{2x}^{0}\cdot\overbrace{(9+x^2)}^{>0}}{\underbrace{(3-x^2)^3}_{-\sqrt{3}\quad\sqrt{3}}}$

$\cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap$

$+ \quad -\sqrt{3} \quad - \quad 0 \quad + \quad \sqrt{3} \quad -$

inflexní bod

$f(0) = \frac{0}{3-0^2} = 0 \rightarrow [0,0]$

$f'(0) = \frac{3+0^2}{(3-0^2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow$ směrnice tečny v inflexním bodu

7 Asymptoty

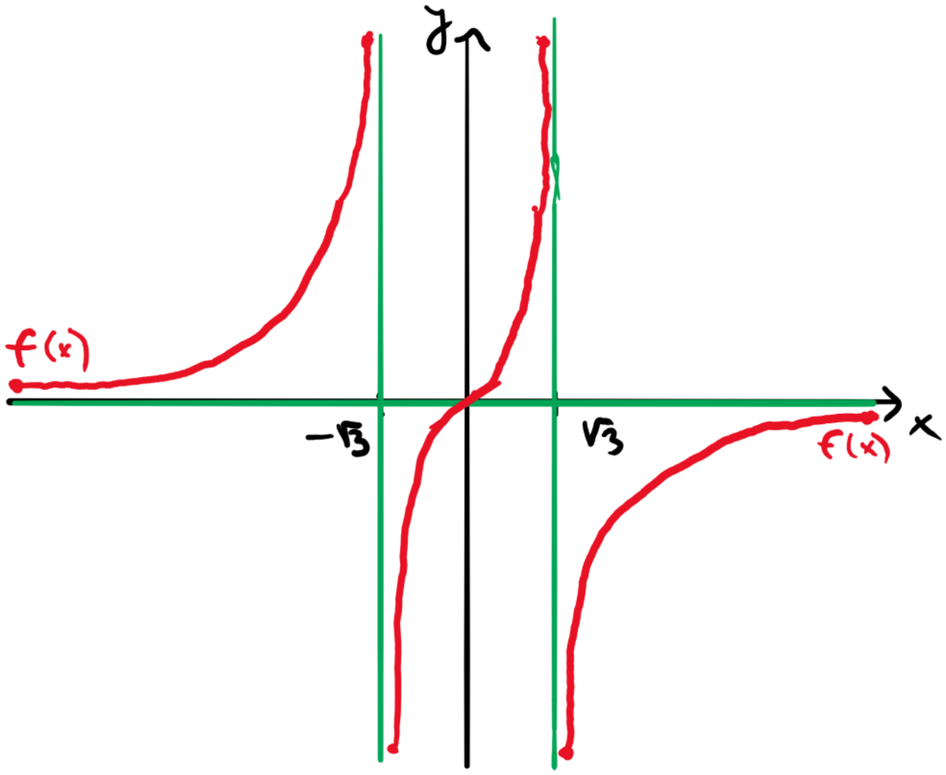
$\rightarrow$ bez směrnice: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

$\rightarrow$ se směrnicí: $y = ax + b$

$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{3-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\cancel{x}\cdot(3-x^2)} = 0$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{3-x^2} = 0$

$\boxed{y = 0}$



Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a) $\sin 29^\circ$

$$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 29^\circ \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + df\left(\frac{\pi}{6}\right)(x - x_0)$$

$$\approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) \doteq 0{,}484885$$

skutečná hodnota: 0,48480962...

b) $\sqrt{80}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \boxed{x_0 = 81}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \boxed{f(81) = 9}, \; f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

80

$$\sqrt{80} \approx f(81) + f'(81) \cdot (x - x_0)$$

$$\approx 9 + \frac{1}{18} \cdot (-1) = 9 - \frac{1}{18} \doteq 8{,}9\overline{4}$$

81

skutečná hodnota: 8,94427 19....

Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

d) $\operatorname{arctg} 1,1$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad x_0 = 1$ $\quad dx = x - x_0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad = 1,1 - 1$

$f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ $\quad = 0,1$

$$\operatorname{arctg} 1,1 \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - x_0)$$
$$\approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1$$
$$\approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{4} + 0,05 \doteq 0,835398$$

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$ $\longrightarrow$ $f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = [x^{-1}]' = \boxed{-1 \cdot x^{-2}} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3} \rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \rightarrow f'''(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$$
$$\approx 1 - \frac{1}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 - \frac{6}{3!} \cdot (x-1)^3$$
$$\approx 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0 \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \longrightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \longrightarrow f'''(0) = -1$

$$\sin x \approx \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}\cdot(x-0) - \frac{\sin 0}{2!}\cdot(x-0)^2 + \frac{-\cos 0}{3!}\cdot(x-0)^3$$

$$\approx 0 + 1\cdot x - 0\cdot x^2 - \frac{1}{6}\cdot x^3$$

$$\approx x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin \underset{x}{29^\circ} \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{1!}\overbrace{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}^{-\frac{\pi}{180}} - \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{180^2} + \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\pi^3}{180^3}$$