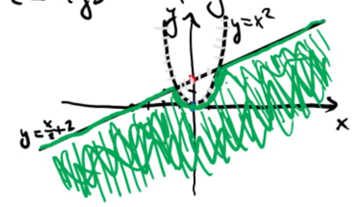
Příklad 1: Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y).

d) $f(x,y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$

1. $x^2 - y > 0 \Leftrightarrow y < x^2$
2. $x - 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2y \leq x + 4 \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 2$

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ y < x^2 \wedge y \leq \frac{x}{2} + 2\}$



$[0,2]$: $y < x^2$

$2 < 0^2$ ✗

$[0,0]$: $y \leq \frac{x}{2} + 2$

$0 \leq \frac{0}{2} + 2$ ✓

g) $f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6x)}$

P1. $\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \geq 0 \ \wedge \ (x^2 + y^2 - 6x) \geq 0$

nebo

P2. $\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \leq 0 \ \wedge \ (x^2 + y^2 - 6x) \leq 0$

$D(f) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ P1 \vee P2\}$

$\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$, elipsa, $S[0,2]$

$(x^2 + y^2 - 6x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + y^2 - 9 = 0$

$(x-3)^2 + y^2 = 3^2$, kružnice, $S[3,0]$, $r=3$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)(x^2+y^2)}$

$= \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+4}}_{a}\underbrace{-2}_{-b}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+4}}_{a}\underbrace{+2}_{+b}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\cdot\cancel{(x^2+y^2)}\cdot(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{\cancel{(x^2+y^2)}+\cancel{4}-\cancel{4}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 12$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 \cos\frac{1}{xy^2} = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 = 0$

omezená funkce

Limita ze součinu fcí f, g, kde
1. $f(x,y) = xy^2$ má limitu $= 0$
2. $g(x,y) = \cos\frac{1}{xy^2}$ je omezená

} Proto

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{1}{x+y} \cdot \cos y = 0$

omezená

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{1}{x+y} = \left[\frac{1}{1+\infty}\right] = 0$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x\cdot y} \cdot \frac{y}{1} = 1 \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y = 1\cdot 2 = 2$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

1

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

1. přibližování po přímkách

$y = k\cdot(x-x_0)+y_0,$

limitní bod $[x_0, y_0] = [0,0]$:

$y = k\cdot(x-0)+0 = kx$

$y = kx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} \overset{y=kx}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x-2kx}{3x+kx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(1-2k)}{\cancel{x}\cdot(3+k)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2k}{3+k}$$

$k=1$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} = \frac{1-2\cdot 1}{3+1} = -\frac{1}{4}$

$k=5$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} = \frac{1-2\cdot 5}{3+5} = -\frac{9}{8}$

limita závisí na parametru k, tedy směrnicích přímek → proto limita neexistuje

2. přibližování po parabolách:

$y = k\cdot(x-x_0)^2+y_0$

Limitní bod: $[x_0, y_0] = [0,0]$

$y = k(x-0)^2+0 = kx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} \overset{y=kx^2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x-2\cdot kx^2}{3x+kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(1-2kx)}{\cancel{x}\cdot(3+kx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2kx}{3+kx}$$

nezávisí pouze na k ⇒ nelze rozhodnout o neexistenci limity

3. Postupné limity: $[x_0, y_0] = [0,0]$

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-2\cancel{y}}{\cancel{y}} = -2$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{1}{3}$$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$ neexistuje