Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

4. pomocí polárních souřadnic, přibližování po kružnicích

$$x = x_0 + \rho\cdot\cos\varphi = 0 + \rho\cdot\cos\varphi = \rho\cdot\cos\varphi$$
$$y = y_0 + \rho\cdot\sin\varphi = 0 + \rho\cdot\sin\varphi = \rho\cdot\sin\varphi$$

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cdot\cos\varphi - 2\cdot\rho\cdot\sin\varphi}{3\cdot\rho\cdot\cos\varphi + \rho\sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cdot(\cos\varphi - 2\sin\varphi)}{\cancel{\rho}\cdot(3\cos\varphi + \sin\varphi)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\varphi - 2\sin\varphi}{3\cdot\cos\varphi + \sin\varphi} \to$$ limita neexistuje, její výsledek závisí na parametru φ (pouze)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

Uvedu zde všechny 4 způsoby, ale Vy si samozřejmě můžete vybrat jen jeden z nich.

a) po přímkách:

$$y = kx: \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(1+k)}{\cancel{x}\cdot(1-k)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k}$$

výsledek limity závisí na k ⇒ lim. neexistuje

b) postupné limity:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1 \\ L_2 &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} L_1 \neq L_2 \Rightarrow \text{lim. neex.}$$

c) po parabolách:

$$y = kx^2: \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(1+kx)}{\cancel{x}\cdot(1-kx)}$$

nedokážeme potvrdit, ani vyvrátit existenci limity

d) polárními souřadnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= \rho\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cdot\cos\varphi + \rho\cdot\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\cdot\sin\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\cancel{\rho}\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi)}$$

výsledek limity závisí pouze na φ ⇒ limita neex.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

Polárními souřadnicemi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= \rho\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot\sin\varphi}{\rho^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\cancel{3}}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}{\underset{1}{\cancel{\rho^2}}\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$$

$\rho \to g(\rho)$ ✓, $\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi \to h(\rho,\varphi)$ ✓

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x,y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0,y_0]$ vyjádřit ve tvaru
$\boxed{f(x,y) = L + g(\varrho)\cdot h(\varrho,\varphi)}$, $L\in\mathbb{R}$, kde

i) $\lim_{\varrho\to 0} g(\varrho) = 0$,

ii) $h(\varrho,\varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0,\varrho_0\rangle\times\langle 0,2\pi)$, kde $\varrho_0>0$.

Pak platí $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L$. $\to 0 \to \lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi = 0$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

Polárními souřadnicemi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= \rho\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\varphi\cdot\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\cancel{6}\,4}\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi}{\cancel{\rho^2}\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}} = \lim_{\rho\to 0}\rho^4\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi \overset{(*)}{=}$$

$\rho^4 \to g(\rho)$, $\lim\limits_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$

$\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi \to h(\rho,\varphi)$ je ohraničená

$\overset{(*)}{=} 0$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

a) po přímkách:

$y = kx$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot kx}{\cancel{x^2} \cdot (x^2+k^2)}$

výraz nezávisí pouze na k $\Rightarrow$ nedokážeme rozhodnout o neexistenci limity.

b) postupné limity:

$L_1 = \lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2} \right) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

$L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$

$L_1 = L_2 \Rightarrow$ to neznamená, že limita existuje a je rovna 0.

c) po parabolách:

$y = kx^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + \underbrace{(kx^2)^2}_{k^2x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4} \cdot k}{\cancel{x^4} \cdot (1+k^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}.$

limita závisí pouze na k $\Rightarrow$ limita neex.

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

e) $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

$\sin x \cdot \sin y \neq 0$

$\downarrow$

$\sin x \neq 0 \wedge \sin y \neq 0$

$x \neq k\pi \wedge y \neq l \cdot \pi$
$k \in \mathbb{Z}$ $\quad l \in \mathbb{Z}$

Body nespojitosti: $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x = k\pi \wedge y = l\pi, k, l \in \mathbb{Z}\}$

Parciální derivace

Příklad 1: Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

e) $z = x \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right)$

$$z'_x = [x \cdot \ln(x^2 - \underbrace{y^2}_{\text{konst.}})]'_x = x' \cdot \ln(x^2-y^2) + x \cdot (\ln(x^2-y^2))'_x$$

$$= \ln(x^2-y^2) + x \cdot \frac{1}{x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$= \ln(x^2-y^2) + \frac{2x^2}{x^2-y^2}$$

$$z'_y = [\underbrace{x}_{\text{konst.}} \cdot \ln(x^2-y^2)]'_y = x \cdot [\ln(x^2-y^2)]'_y =$$

$$= x \cdot \frac{1}{x^2-y^2} \cdot (-2y) =$$

$$= -\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Příklad 2: Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce v bodě A:

a) $f(x, y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1+x^2}, \; A = [2, 5]$

$$f'_x = y \cdot [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]'_x = y \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow f'_x(2,5) = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$f'_y = 2y + \sqrt{1+x^2} \rightarrow f'_y(2,5) = 10 + \sqrt{5}$$

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

1. řád:

$z'_x = 2x + y - 3y^3$

$z'_y = x - 3x \cdot 3y^2 = x - 9xy^2$

2. řád:

$z'_{xx} = [2x + y - 3y^3]'_x = 2$

$z'_{xy} = [2x + y - 3y^3]'_y = 1 - 3.3.y^2 = 1 - 9y^2$

$z'_{yx} = [x - 9xy^2]'_x = 1 - 9y^2$

$z'_{yy} = [x - 9xy^2]'_y = -9x \cdot 2y = -18xy$

b) $z = \frac{xy+x}{y} = \cancel{\frac{xy}{y}} + \frac{x}{y} = x + \frac{x}{y}$

$z'_x = 1 + \frac{1}{y} = 1 + y^{-1}$

$z'_y = -\frac{x}{y^2}$

$z'_{xx} = 0$

$z'_{xy} = -\frac{1}{y^2}$

$z'_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

$z'_{yy} = -x \cdot (y^{-2})'_y = \frac{2x}{y^3}$