Příklad 1: Spočtěte totální diferenciál funkce f v obecném bodě $[x,\ y]$.

c) $f(x,y) = x^y$

$$f'_x = \left[(x)^{y}\right]'_x = y \cdot x^{y-1} \quad \text{konst.}$$

$$f'_y = \left[x^{y}\right]'_y = x^y \cdot \ln x$$

konst. $\qquad$ a

$$df(x_0, y_0) = y \cdot x^{y-1} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{dx} + x^y \cdot \ln x \cdot \underbrace{(y - y_0)}_{dy}$$

Příklad 2: Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané $dx,\ dy$.

b) $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},\ A = [3,4],\ dx = 0{,}1,\ dy = 0{,}2$

$$[x_0, y_0, z_0] = [3, 4, f(3,4)]$$

$$[x, y, z] = [3{,}1;\ 4{,}2;\ f(3{,}1;\ 4{,}2)]$$

$$f'_x = 1 - \left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]'_x = 1 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x$$

$$= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow f'_x(3,4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'_y = 1 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}y = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\longrightarrow f'(3,4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$df(3,4) = \frac{2}{5} \cdot \underbrace{\frac{1}{10}}_{0{,}1} + \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{0{,}2} = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{50}_{\,25}} + \frac{1}{25} = \frac{2}{25}$$

Příklad 3: Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně hodnotu následujících výrazů.

a) $\arctan \frac{1{,}02}{0{,}95}$

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

$$[x_0, y_0] = [1, 1] \rightarrow \boxed{dx = 0{,}02},\ \boxed{dy = -0{,}05}$$

$$f'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} \rightarrow f'_x(1,1) = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \rightarrow f'_y(1,1) = \frac{1}{1+1} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1{,}02}{0{,}95} \approx f(1,1) + df(1,1) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{100} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{100}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{4} + 0{,}01 + \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{200}_{40}} = \frac{\pi}{4} + \frac{2+5}{200} = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{200} \doteq 0{,}82$$

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $[x_0, y_0, z_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Vzorec:

$\tau : z = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$.

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \rightarrow \boxed{f'_x(x_0,y_0) = f'_x\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{-\frac{1}{\sqrt3}}{\sqrt{1-\frac13-\frac13}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt3}}{\sqrt{\frac13}} = \frac{-\cancel{\frac{1}{\sqrt3}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt3}}} = -1}$$

$$f'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \rightarrow f'_y(x_0,y_0) = f'_y\left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right) = -1$$

$$\tau:\ z = (-1)\cdot\left(x - \frac{1}{\sqrt3}\right) - \left(y - \frac{1}{\sqrt3}\right) + \frac{1}{\sqrt3}$$

$$z = -x - y + \frac{1}{\sqrt3} + \frac{1}{\sqrt3} + \frac{1}{\sqrt3}$$

$$z = -x - y + \frac{3}{\sqrt3}$$

Normála

$(x, y, z) = (x_0 + t \cdot f_x(x_0, y_0), y_0 + t \cdot f_y(x_0, y_0), z_0 - t), t \in \mathbb{R}$.

$$n:\ x = \frac{1}{\sqrt3} + t\cdot(-1) = \frac{1}{\sqrt3} - t$$

$$y = \frac{1}{\sqrt3} + t\cdot(-1) = \frac{1}{\sqrt3} - t$$

$$z = \frac{1}{\sqrt3} - t,\ t \in \mathbb{R}$$

Příklad 4: Určete rovnici tečné roviny τ a normály n ke grafu funkce v zadaném bodě:

b) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, z_0] = [1; 1; 4]$

$f'_x = 2x + y \rightarrow f'_x(1,1) = 2 + 1 = 3$

$f'_y = 4y + x \rightarrow f'_y(1,1) = 4 + 1 = 5$

τ: $z = 3 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 1) + 4$

$z = 3x + 5y - 4 \rightarrow$ tečná rovina

n: $x = 1 + 3t$

$y = 1 + 5t$

$z = 4 - t, \; t \in \mathbb{R}$

Příklad 5: Určete lokální extrémy funkce dvou proměnných.

d) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2xy - 5x$

$f'_x = 3x^2 + y^2 - 2y - 5$

$f'_y = 2xy - 2x$

1. Hledání stacionárních bodů:

$3x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$

$2xy - 2x = 0 \quad /:2$

$xy - x = 0$

$x\cdot(y-1) = 0$

$x = 0$

$3\cdot 0^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$

$y^2 - 2y - 5 = 0$

$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)$
$= 24$

$y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \dfrac{2 \pm 2\cdot\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\cdot(1 \pm \sqrt{6})}{\cancel{2}}$

$= \left\langle \begin{array}{l} y = 1 - \sqrt{6} \\ y = 1 + \sqrt{6} \end{array} \right.$

$S_1 = [0, 1 - \sqrt{6}]$

$S_2 = [0, 1 + \sqrt{6}]$

$y = 1$

$3x^2 + 1^2 - 2\cdot 1 - 5 = 0$

$3x^2 - 6 = 0$

$3x^2 = 6 \quad /:3$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$S_3[-\sqrt{2}, 1]$

$S_4[\sqrt{2}, 1]$

2. Parciální derivace 2. řádu

$f''_{xx} = [3x^2 + y^2 - 2y - 5]'_x = 6x$

$f''_{xy} = [3x^2 + y^2 - 2y - 5]'_y = 2y - 2$

$f''_{yx} = [2xy - 2x]'_x = 2y - 2$

$f''_{yy} = [2xy - 2x]'_y = 2x$

3. Hessova matice a její determinant:

$J(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y).$

$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{vmatrix} = 6x\cdot 2x - (2y-2)^2$

$= 12x^2 - (2y-2)^2$

4. Určení lokálních extrémů:

$S_1[0, 1-\sqrt{6}]$: $J(0, 1-\sqrt{6}) = \underbrace{12\cdot 0^2}_{} - (2\cdot(1-\sqrt{6}) - 2)^2 < 0$

S_1 není lok. extrém, jde o sedlo

$S_2[0, 1+\sqrt{6}]$: $J(0, 1+\sqrt{6}) = 12\cdot 0^2 - (2\cdot(1+\sqrt{6}) - 2)^2 < 0$

S_2 není lokální extrém, je to sedlo

$S_3[-\sqrt{2}, 1]$: $J(-\sqrt{2}, 1) = 12\cdot(-\sqrt{2})^2 - \underbrace{(2\cdot 1 - 2)^2}_{0} = 24 > 0$

$f''_{xx}(-\sqrt{2}, 1) = 6\cdot(-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$

$J(-\sqrt{2}, 1) > 0 \;\wedge\; f''_{xx}(-\sqrt{2}, 1) < 0 \Rightarrow S_3$ lok. max.

$S_4[\sqrt{2}, 1]$: $J(\sqrt{2}, 1) = 12\cdot(\sqrt{2})^2 - \underbrace{(2\cdot 1 - 2)^2}_{0} = 24 > 0$

$f''_{xx}(\sqrt{2}, 1) = 6\cdot\sqrt{2} > 0$

$J(\sqrt{2}, 1) > 0 \;\wedge\; f''_{xx}(\sqrt{2}, 1) > 0 \Rightarrow S_4$ lok. minimum