**Příklad 1:** Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)$ monotónní:

(a) $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \dots$

Hypotéza: rostoucí posl.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} - \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{\cancel{-n} + \cancel{n} + 2}{n \cdot (n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} > 0, \text{ protože } n \in \mathbb{N}$$

Proto $a_n$ je rostoucí, tudíž monotónní.

**Příklad 2:** Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)$ omezená:

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$

Hypotéza: určitě je omezená shora číslem 2, protože od něj prvky klesají

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n \cdot (n+2) - (n+1)^2}{n \cdot (n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{-1}{n \cdot (n+1)} < 0, \text{ takže } a_n \text{ je klesající}$$

Posl. $a_n$ je omezená, minimálně shora číslem

Pomocí $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n}$ bychom zjistili, že posl. je omezená i zdola, a to číslem 1.

**Příklad 3c:** Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$ zadaných posloupností:

(a) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2+1}$

(b) $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+1}$

(c) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+1}{n^2}}{\frac{2n^2+1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}+\frac{1}{n^2}}$

$\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{2n^2}{n^2} \to 2$, $\frac{1}{n^2} \to 0$

$= \frac{0+0}{2+0} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+1}{n}}{\frac{2n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}}$

$3n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, $2$, $\frac{1}{n} \to 0$

$= \left[\frac{\infty+0}{2+0}\right] = \left[\frac{\infty}{2}\right] = \infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2-3}\right) = [\infty - \infty]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2\cdot(n^2-3) - 6n^3\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n^2-3)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2\cdot n^2 - 6n^3\cdot n}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4n^4}{n^3} = -\infty$