**Příklad 1:** Určete intervaly monotonie a lokální extrémy pro následující funkce.

e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$ $\qquad D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left[(x^4-1)^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}\cdot(x^4-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 4x^3$$

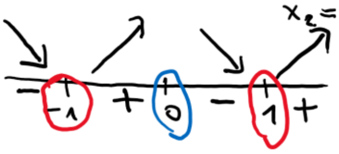
$$= \frac{8x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^4-1}}$$

$x_1 = 0$

$x^4 - 1 = 0$

$(x^2-1)\underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0} = 0$

$x_2 = -1 \qquad x_3 = 1$




klesající pro $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

rostoucí pro $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

Lokální extrém je bod, ve kterém je funkce f definovaná a v němž se mění z rostoucí na klesající nebo naopak.

Lokální extrém může nastat:

1. v bodě, v němž je 1. derivace =0,
2. nebo v bodě, ve kterém 1. derivace neexstuje

Lokální minima: $x = -1$ a $x = 1$

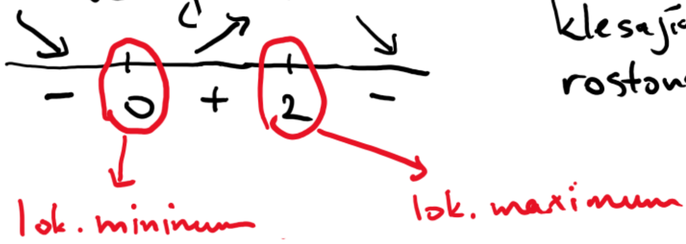
Lokální maximum: $x = 0$

$$\boxed{(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}}$$

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $D(f) = R$ $\qquad \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x > 0$

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} - x^2\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(-x^2+2x) = e^{-x}\cdot x\cdot(2-x)$$

nulové body: 0, 2




klesající pro $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$

rostoucí pro $x \in (0,2)$

**Příklad 2:** Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

d) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1-x^2)$, $D(f) = D(f') = R$

$\cup$ konvexní – graf zatáčí doleva
– tečna pod grafem

$\cap$ konkávní – graf zatáčí doprava
– tečna nad grafem

$$f''(x) = \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1-x^2)\right]' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}x \cdot (1-x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left[-x \cdot (1-x^2) - 2x\right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^3 - 3x)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot (x^2 - 3)$$

$e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, $x = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 = 3$, $\boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

$\cap$ $\cup$ $\cap$ $\cup$

$-$ | $-\sqrt{3}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\sqrt{3}$ | $+$

inflexní body

konkávní pro $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
konvexní pro $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Inflexní bod je bod, v němž je funkce f definovaná a mění se v něm z konvexní na konkávní nebo naopak.
Inflexní bod nastává v bodě,
1. ve kterém je 2. derivace =0,
2. nebo ve kterém 2. derivace neexistuje.

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$, $D(f) = R$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24 = 12 \cdot (x^2 - x - 2) = 12 \cdot (x-2)(x+1)$$

$x = 2$, $x = -1$

$\cup$ $\cap$ $\cup$

$+$ | $-1$ | $-$ | $2$ | $+$

inflexní body

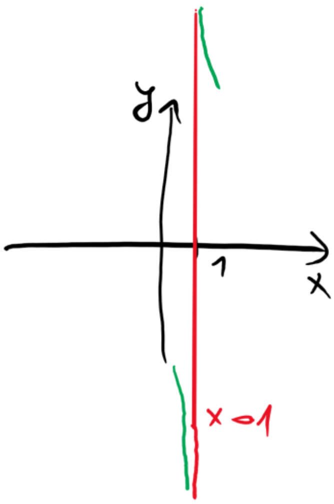
konvexní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
konkávní pro $x \in (-1, 2)$

$$\left.\begin{aligned} f'(-1) &= -4 - 6 + 24 + 7 = 21 \\ f'(2) &= 32 - 24 - 48 + 7 = -33 \end{aligned}\right\} \text{směrnice tečen v inflexních bodech}$$

**Příklad 3:** Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$$\ln x \neq 0 \quad \wedge \quad x > 0$$
$$x \neq 1 \quad \wedge \quad x > 0$$
$$D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$




$x = 1$ ... bod nespojitosti

$x = 1$ ... asymptota bez směrnice

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\text{malé záporné číslo}} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\text{malé kladné číslo}} \right] = \infty$$

**Příklad 4:** Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $D(f) = R - \{1\}$

$$y = ax + b$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{\underbrace{x(x-1)}_{x^2 - x}} = \begin{cases} \xrightarrow{x \to \infty} 3 \\ \xrightarrow{x \to -\infty} 3 \end{cases}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left( f(x) - a \cdot x \right)$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x-1} - 3x$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x \cdot (x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2} + 3x}{x - 1}$$

$$= 3$$

$$\boxed{y = 3x + 3}$$

**Příklad 6:** Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$, $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$3 - x^2 \neq 0$

$3 \neq x^2$

$\pm\sqrt{3} \neq x$

$-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ ↓ ↓ body nespojitosti

2. $f(-x) = \frac{-x}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -\frac{x}{3-x^2} = -f(x)$

lichá funkce

3. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = -\infty$

4. $f(x) = 0$

$\frac{x}{3-x^2} \stackrel{?}{=} 0$

| nad osou x | pod osou x | nad osou x | pod osou x |
|---|---|---|---|
| $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

$-\sqrt{3}$ $\qquad$ $0$ $\qquad$ $\sqrt{3}$

5. $f'(x) = 0$

$\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} = 0$

$3+x^2 > 0$

$(3-x^2)^2 > 0$ pro $x \in D(f)$

Pokračování příště...