Příklad 6: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načtrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$, $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$3 - x^2 \neq 0$

$3 \neq x^2$

$\pm\sqrt{3} \neq x$

body nespojitosti

2. $f(-x) = \frac{-x}{3-(-x)^2} = \frac{-x}{3-x^2} = -\frac{x}{3-x^2} = -f(x)$

lichá funkce

3. $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{\text{malé záporné číslo}}\right] = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} \frac{x}{3-x^2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{\text{malé kladné číslo}}\right] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \frac{x}{3-x^2} = -\infty$

4. $f(x) = 0$

$\frac{x}{3-x^2} \stackrel{?}{=} 0$

nad osou x | pod osou x | nad osou x | pod osou x

$+ \quad | \quad - \quad | \quad + \quad | \quad -$

$-\sqrt{3} \qquad 0 \qquad \sqrt{3}$

5. $f'(x) = 0$

$\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} = 0$

$3+x^2 > 0$

$(3-x^2)^2 > 0$ pro $x \in D(f)$

Pokračování příště...

6. $f''(x) = \frac{2x \cdot (9+x^2)}{(3-x^2)^3} = 0$

$\cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap$

$+ \quad | \quad - \quad | \quad + \quad | \quad -$

$-\sqrt{3} \qquad 0 \qquad \sqrt{3}$

inflexní bod

$f(0) = \frac{0}{3-0^2} = 0 \Rightarrow [0,0]$

$f'(0) = \frac{3+0^2}{(3-0^2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

7. asymptota bez směrnice: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

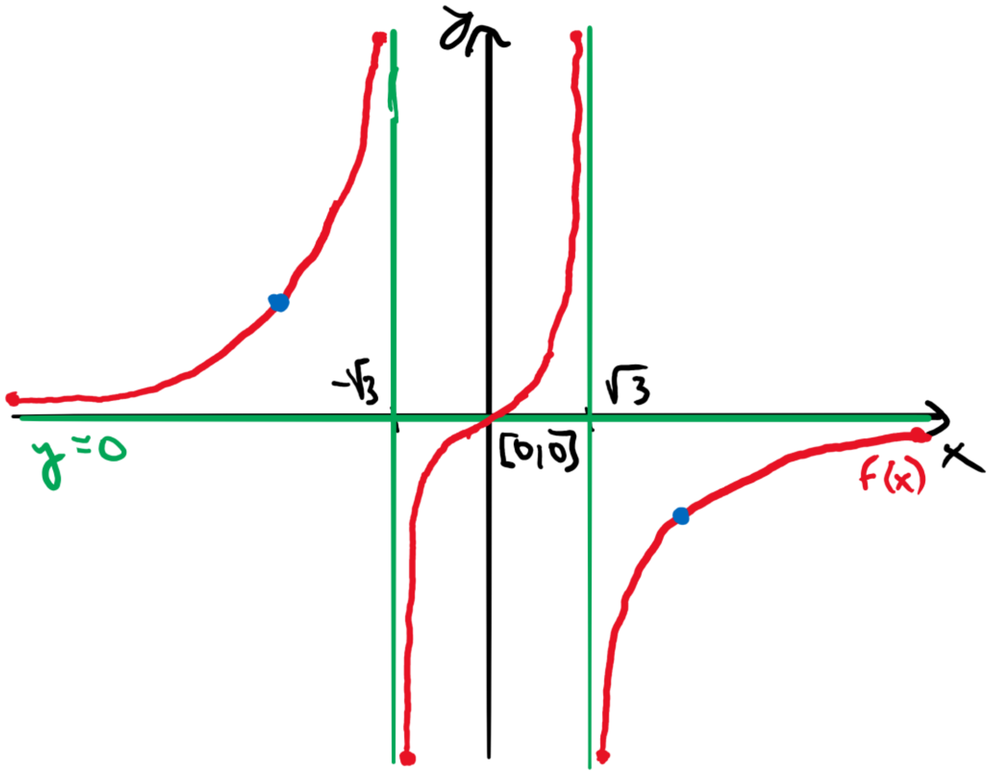
asymptoty se směrnicí:

$y = ax + b$

$a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{3-x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1} \cdot (3-x^2)} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3-x^2} = 0$

$\boxed{y = 0}$



Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a) $\sin 29^\circ$ x

$f(x) = \sin x \qquad x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = \cos x \qquad dx = x - x_0 = 29^\circ - 30^\circ = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$

$\sin 29^\circ \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right)$

$\approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{360} = 0{,}484885$

skutečná hodnota: $\sin 29^\circ = 0{,}48480962$

b) $\sqrt{80}$

$f(x) = \sqrt{x} \ \left(= x^{\frac{1}{2}}\right) \qquad x_0 = 81$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad dx = x - x_0 = 80 - 81 = -1$

$\sqrt{80} \approx f(81) + f'(81) \cdot (-1)$

$\approx \sqrt{81} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{81}} \cdot (-1) = 9 - \frac{1}{2 \cdot 9} = 9 - \frac{1}{18} = 8{,}9\overline{4}$

skutečná hodnota: $\sqrt{80} = 8{,}94427191\ldots$

Příklad 1: Pomocí diferenciálu určitě přibližnou hodnotu následujících výrazů.

d) $\operatorname{arctg} 1,1$

$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad x_0 = 1$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad dx = x - x_0 = 1,1 - 1 = 0,1$

$$\operatorname{arctg} 1,1 \approx f(1) + f'(x_0) \cdot 0,1$$
$$\approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0,1$$
$$\approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{20} = \frac{\pi}{4} + 0,05 \doteq 0,835398\ldots$$

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \; x_0 = 1$

$f'(x) = [x^{-1}]' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad f(1) = 1$

$f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}, \qquad f'(1) = -1$

$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}, \qquad f''(1) = 2$

$f'''(1) = -6$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$$

$$\frac{1}{x} \approx 1 - (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 - \frac{6}{3!} \cdot (x-1)^3$$
$$\approx 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

Příklad 2: Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě x_0 pro funkci $f(x)$.

c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$

$$\sin x \approx 0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-0) + \frac{0}{2!}\cdot(x-0)^2 - \frac{1}{3!}(x-0)^3$$

$$\approx x - \frac{x^3}{6}$$

$\sin 29°$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{f'(\frac{\pi}{6})}{1!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''(\frac{\pi}{6})}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{\pi}{6})}{3!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$$

$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $f'''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$$\sin 29° \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{2\cdot 2!}\left(-\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3!}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)^3$$

$$\approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{360} - \frac{\pi^2}{4\cdot 180^2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\pi^3}{12\cdot 180^3}$$

Dotaz Petry Chlebkové na Příklad 3b z cvičení 7:

$$y = 5x + \frac{\sin x}{x}$$

bod nespojitosti: $x = 0$ asympt. bez směrnice

$$\lim_{x\to 0^-}\left(5x + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}(5x) + \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(5x + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(5x) + \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right]$$