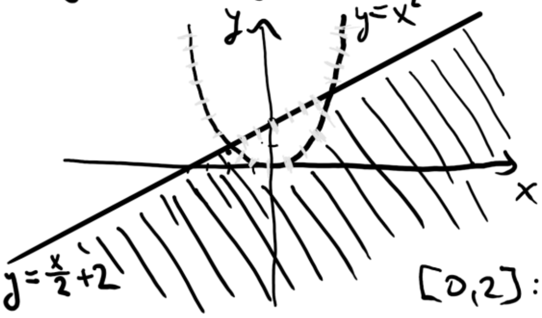
Příklad 1: Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y).

d) $f(x, y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$

1. $x^2 - y > 0 \iff y < x^2$
2. $x - 2y + 4 \geq 0 \iff 2y \leq x + 4 \iff y \leq \frac{x}{2} + 2$

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ y < x^2 \wedge y \leq \frac{x}{2} + 2\}$



$[0,2]$: $y < x^2$

$2 < 0^2$ ✗

$[0,0]$: $y \leq \frac{x}{2} + 2$

$0 \leq \frac{0}{2} + 2$ ✓

g) $f(x, y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6x)}$

1. $\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \geq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 6x) \geq 0$
2. $\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \leq 0 \wedge (x^2 + y^2 - 6x) \leq 0$

$\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{\underbrace{4}_{2^2}} \geq 1 \rightarrow$ elipsa, $S[0,2]$

$x^2 + y^2 - 6x \geq 0$

$(x^2 - 6x + 9) + y^2 - 9 \geq 0$

$(x-3)^2 + y^2 \geq 3^2 \rightarrow$ kružnice, $S[3,0]$

poloměr je 3

Dotáhnout doma ...

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

c) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,\,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

d) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+4}}_{a}\underbrace{-2}_{-b}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+4}}_{a}\underbrace{+2}_{+b}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\cancel{(x^2+y^2)}\cdot(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{\cancel{x^2+y^2}\cancel{+4}\cancel{-4}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3\cdot(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12$

g) $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} xy^2 \cdot \cos\frac{1}{xy^2} = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^2 = 0$

omezená funkce

Použijeme větu o limitě součinu fcí f, g, kde

1. limita fce f je rovna 0,
2. fce g je omezená.

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{1}{x+y} \cdot \cos y = 0$

$0 \leftarrow \left[\frac{1}{\infty}\right] \Leftarrow \left[\frac{1}{1+\infty}\right]$ 0

omezená fce

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x\cdot y} \cdot \frac{y}{1} = 1\cdot\frac{2}{1} = 2$

1

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

1. přibližování po přímkách:

$y = k\cdot(x-x_0) + y_0$, kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod

$[0,0]$: $y = k\cdot(x-0)+0$

$y = kx$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} \overset{y=kx}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x-2\cdot kx}{3x+kx} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cancel{x}\cdot(1-2k)}{\cancel{x}\cdot(3+k)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1-2k}{3+k}$ → výsledek limity závisí na směrnicích přímek, po kterých se přibližujeme k lim. bodu $\Rightarrow$ limita neex.

2. přibližování po parabolách:

$y = k\cdot(x-x_0)^2 + y_0$, $[x_0, y_0] = [0,0]$

$y = k\cdot(x-0)^2 + 0 = kx^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y} \overset{y=kx^2}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x-2kx^2}{3x+kx^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cancel{x}\cdot(1-2kx)}{\cancel{x}\cdot(3+kx)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1-2kx}{3+kx}$ výraz závisející na x $\Rightarrow$ nelze touto metodou rozhodnout o neexistenci limity

3. Postupné limity:

$L_1 = \lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} \frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim\limits_{y\to0} \frac{-2\cancel{y}}{\cancel{y}} = -2$

$L_2 = \lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} \frac{x-2y}{3x+y}\right) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}} = \frac{1}{3}$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$ neexistuje