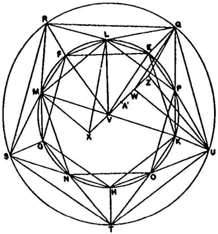
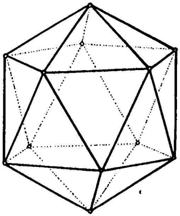
Konstrukční geometrie





Poslední aktualizace: 23. března 2021, Vojtěch Žádník

http://is.muni.cz/el/1441/jaro2021/MA0007/

Plán

Celkově

- jaro 2021: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2021 a jaro 2021: počítací geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Jaro 2021

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Plán

Celkově

- jaro 2021: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2021 a jaro 2021: počítací geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Jaro 2021

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Organizační věci

Preference

(1) celkový přehled
(2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
(3) konstrukce a technické záležitosti

Materiály

- IS: osnova, přednáška, GeoGebra, odkazy, staré písemky

Zakončení

- výkresy → zkoušková písemka → ústní zkouška

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

Organizační věci

Preference

(1) celkový přehled
(2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
(3) konstrukce a technické záležitosti

detaily rámec

Materiály

- IS: osnova, přednáška, GeoGebra, odkazy, staré písemky

Zakončení

- výkresy → zkoušková písemka → ústní zkouška

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[1] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[2]

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, . . .*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů. . .*

---

[1] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady

[2] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[1] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[2]

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, ...*

Def.

$p \cap q = \emptyset$

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů...*

[1] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady
[2] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[1] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[2]

Základní pojmy:

- *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, ...*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů...*

---

[1]kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady
[2]kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

OTEVŘENÁ!

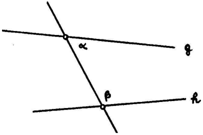
(I) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

(III) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

(V) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*



UZAVŘENÁ!

$\alpha + \beta < 2R \implies$ *g a h se protínají*

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce.* Postulát (V) je přezdíván *pátým Eukleidovým postulátem.*[3]

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

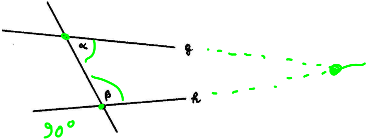
(I) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

(III) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

(V) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*



$\alpha + \beta < 2R \Longrightarrow g$ a h se protínají , tj. není ∥.

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce.* Postulát (V) je přezdíván *pátým Eukleidovým postulátem.*[3]

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

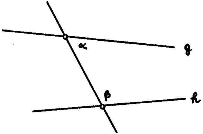
(I) *Každé dva různé body spojuje přímka.*

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.*

(III) *Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

(V) *Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*



$\alpha + \beta < 2R \Longrightarrow$ *g a h se protínají*

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce*. Postulát (V) je přezdíván *pátým Eukleidovým postulátem*.[3]

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \Longrightarrow k = m$.
- $k = l$ a $m = n \Longrightarrow k + m = l + n$.
- apod.[4]

[4] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \Longrightarrow k = m$.
- $k = l$ a $m = n \Longrightarrow k + m = l + n$.
- apod.[4]

[4] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html

Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány. . .

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

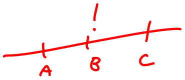
- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

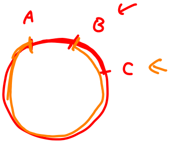
. . . jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky![5]

[5] viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 24)

Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány…





Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

… jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky![5]

[5] viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 24)

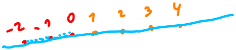
Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

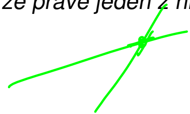
Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány...

eukl. př. $\cong \mathbb{R}$

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*





Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \boxed{\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$

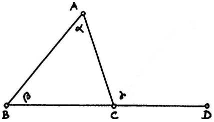
tělesa

... jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky![5]

[5]viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 24).

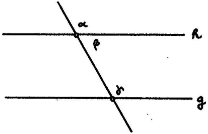
Co na postulátu (V) nezávisí

- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[6]



$\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[7] (odtud existence rovnoběžky).



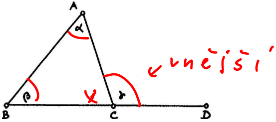
$\alpha = \gamma \Longrightarrow h \parallel g$

[6] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání (viz s. 8).
[7] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 9).

Co na postulátu (V) nezávisí

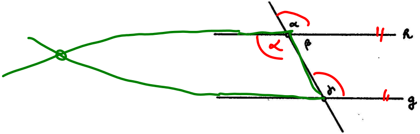
- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[6]

Def h g pokud $h \cap g = \emptyset$



$\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[7] (odtud existence rovnoběžky). !!



$\alpha = \gamma \Longrightarrow h \parallel g$

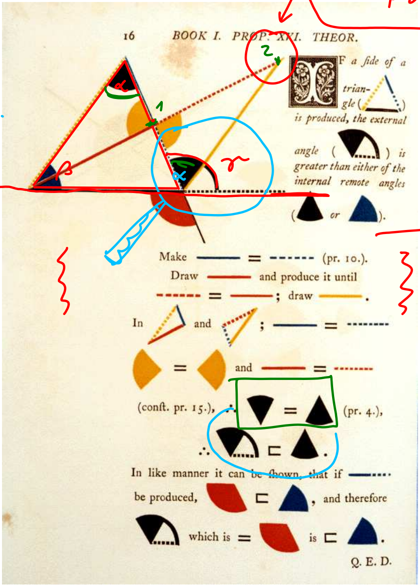
$\alpha < \gamma \Leftarrow h \nparallel g$

[6] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání (viz s. 8).

[7] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 9).

Detail k větě o vnějším úhlu v trojúhelníku[11]

bod 2 ve stejné polorovině jako 1



16 BOOK I. PROP. XVI. THEOR.

If a ſide of a triangle ( ) is produced, the external angle ( ) is greater than either of the internal remote angles (or).

Make —— = - - - - (pr. 10.).
Draw —— and produce it until
- - - - = ——; draw ——.

In and ; —— = - - - -

= and —— = - - - -

(conſt. pr. 15.), ∴ = (pr. 4.),

∴ ⊏ .

In like manner it can be ſhown, that if —··· be produced, ⊏ , and therefore which is = is ⊏ .

Q. E. D.

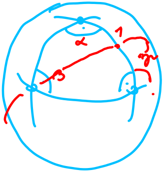
γ > α

(γ > β)

– 1
– 2

shodnost
SUS

γ > α

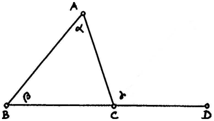


[11] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html

Co na postulátu (V) nezávisí

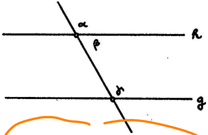
- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[6]

Def ∥



$\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[7] (odtud existence rovnoběžky).

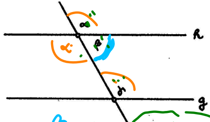


$\alpha = \gamma \Longrightarrow h \parallel g$

[6] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání (viz s. 8).
[7] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 9).

Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[8] (odtud jednoznačnost rovnoběžky).

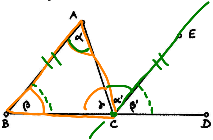


$h \nparallel g$

V: $180^\circ \neq \gamma + \beta \Leftarrow \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \Leftarrow \alpha \neq \gamma$

$$h \parallel g \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[9]



$$\alpha + \beta + \gamma = 2R = 180^\circ$$

- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.[10]
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

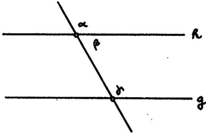
[8] Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \Longrightarrow 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 10).

[9] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 11).

[10] Podrobněji od s. 12...

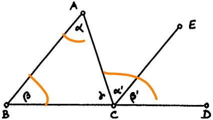
Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[8] (odtud jednoznačnost rovnoběžky).



$$h \parallel g \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[9]



$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

$\alpha+\beta+\gamma$ není KONST.

a > 2R

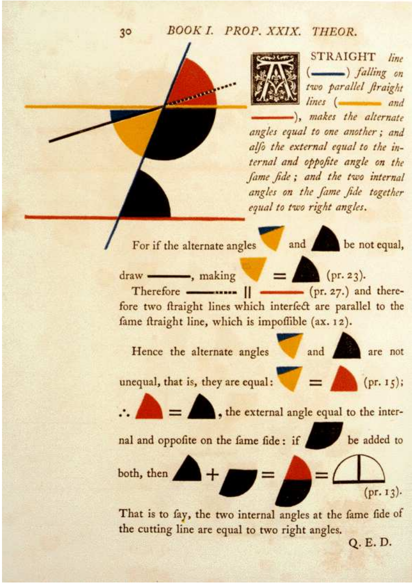
- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.[10]
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

[8] Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \Longrightarrow 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 10).

[9] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 11).

[10] Podrobněji od s. 12...

Detail k větě o střídavých úhlech[13]



30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.

A STRAIGHT line ( ) falling on two parallel ſtraight lines (and), makes the alternate angles equal to one another; and alſo the external equal to the internal and oppoſite angle on the ſame ſide; and the two internal angles on the ſame ſide together equal to two right angles.

For if the alternate angles and be not equal, draw , making = (pr. 23).

Therefore || (pr. 27.) and therefore two ſtraight lines which interſect are parallel to the ſame ſtraight line, which is impoſſible (ax. 12).

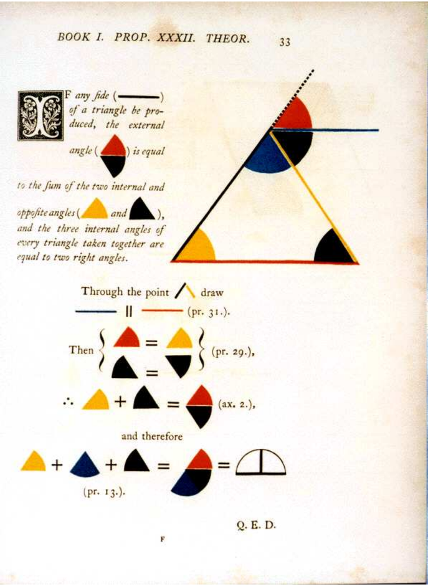
Hence the alternate angles and are not unequal, that is, they are equal: = (pr. 15); ∴ = , the external angle equal to the internal and oppoſite on the ſame ſide: if be added to both, then + = = (pr. 13).

That is to ſay, the two internal angles at the ſame ſide of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

[13] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html

Detail k větě o součtu úhlů v trojúhelníku[14]



BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

IF any ſide ( ) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles (and), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw || (pr. 31.).

Then = = (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

+ + = = (pr. 13.).

Q. E. D.

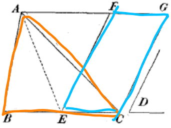
F

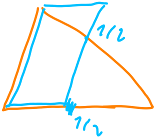
[14] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html

Základní tvrzení o rovnostech obsahů[15]

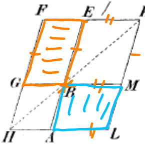
1) ► *Rovnoběžníky, (resp. trojúhelníky) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.*

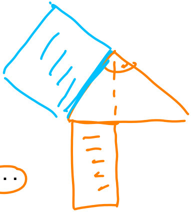
2) ► *Trojúhelník ABC a rovnoběžník ECGF mají stejný obsah* (kde $E =$ střed BC a $BC \parallel AF$):





3) ► *Rovnoběžníky BEFG a BALM mají stejný obsah* (kde společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):





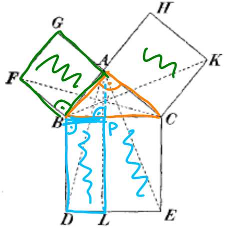
4) ► Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta Pythagorova...

[15]Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 14, 15).

4

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.
Potom platí $BP \cdot BC = BA^2$ a $CP \cdot CB = CA^2$, tudíž $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



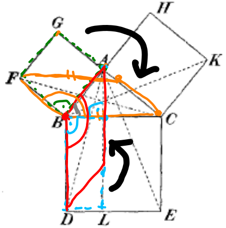
Důkaz.

- $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý $\Longrightarrow$ body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB.
- Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. FBC a ABD a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.
Obdobně to funguje na druhé straně... □

Věta
Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.
Potom platí $BP \cdot BC = BA^2$ a $CP \cdot CB = CA^2$, tudíž $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



Důkaz.

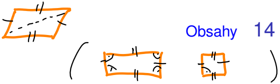
- $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý $\Longrightarrow$ body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB.
- Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. FBC a ABD a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } FBA \overset{!}{=} \text{obsah } FBC \overset{!}{=} \text{obsah } ABD \overset{!}{=} \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.
Obdobně to funguje na druhé straně. . . □

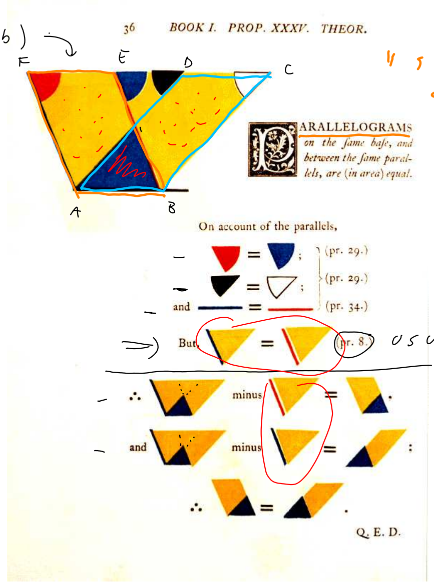
Detail k větě o obsazích rovnoběžníků[16]

Def



1

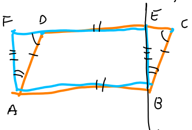
(b)



USU

„stejná zákl.
stejná výška
⇓
stejný obsah"

(a)

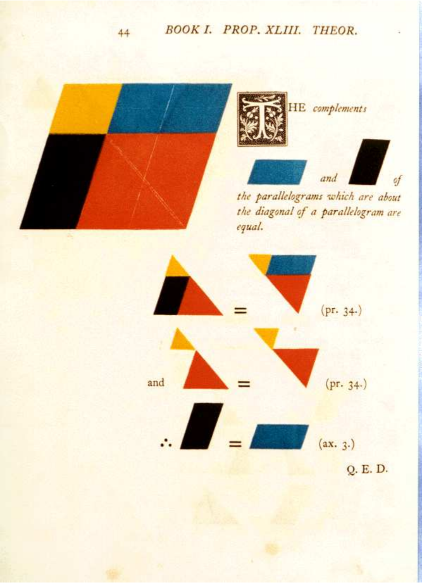


shodnost
∢ADF = △BCE

SUS
SSS
USU

[16] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html

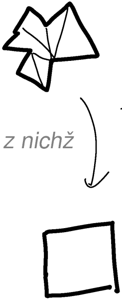
Detail k větě o složených rovnoběžnících[17]



[17] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html

Kvadratura mnohoúhelníku

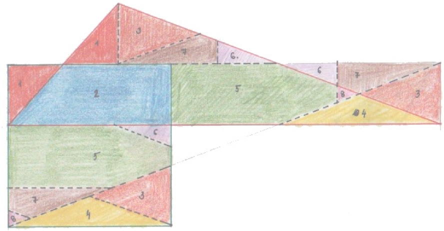
Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[18]



Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním...

Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\iff$ jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.

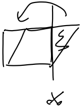


Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

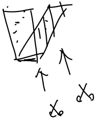
[18] `http://ggbtu.be/mkripDpYd`

Kvadratura mnohoúhelníku

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[18]

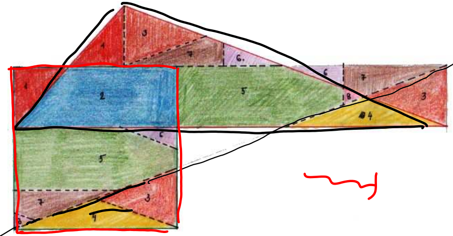


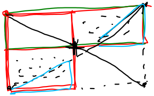
Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním. . .



Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\iff$ jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.

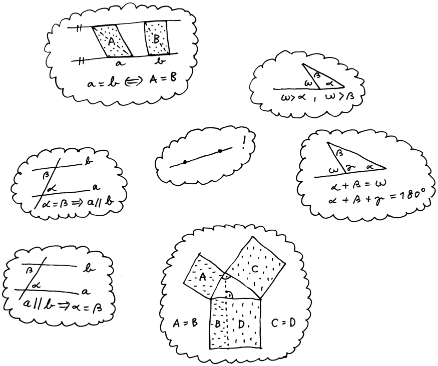




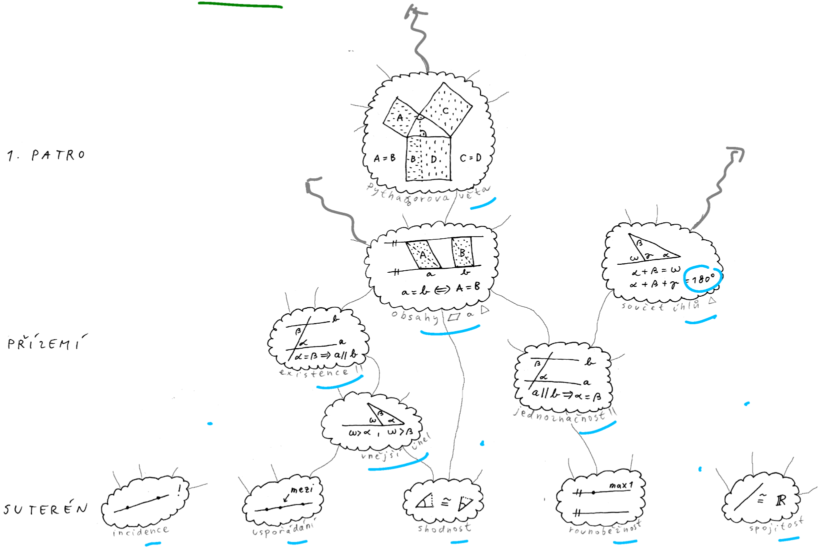
Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

[18] http://ggbtu.be/mkripDpYd

Mezishrnutí — takto NE!

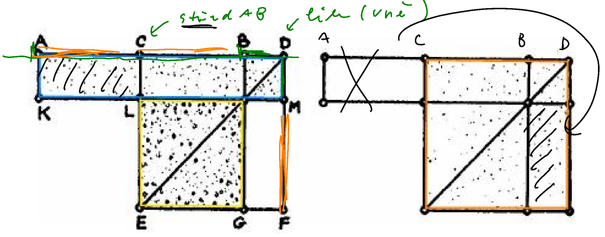


Mezishrnutí — takto ANO!



Geometrická algebra

... geometrické konstrukce vs. algebraické výrazy...



Obrázek 4.11: $\boxed{\text{A}}$ II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Důkaz

Poznámky

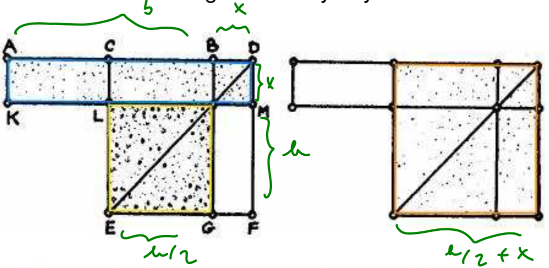
Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}+x\right)^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}+x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce. Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice...

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 22)...

… geometrické konstrukce vs. algebraické výrazy…



Obrázek 4.11: [A] II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Poznámky

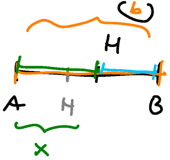
Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$\boxed{(b+x)x} + \boxed{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \boxed{\left(\frac{b}{2}+x\right)^2}, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}+x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce. Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice…

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 22)…

Zlatý řez



Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad (\text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.)$$

$$b : x = x : (b - x)$$

$$b \cdot (b - x) = x \cdot x$$

$$b^2 - bx = x^2$$

$$\boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}$$

(spec.) kvadr. rovnice

Konstrukce

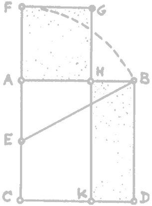
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$.

Potom AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \left(\text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.\right)$$

Konstrukce

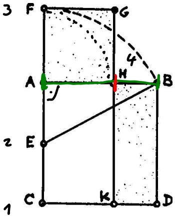
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$.

Potom AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



Důkaz a něco navíc

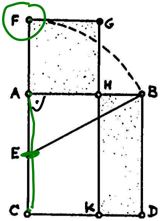
→ Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 21) a z Pythagorovy věty (s. 14):

$$CF \cdot FA + \cancel{AE^2} \overset{!}{=} EF^2 = EB^2 \overset{!}{=} \cancel{AE^2} + AB^2, \quad \text{neboli} \quad \boxed{CF \cdot FA = AB^2.}$$

konstr.

Tzn. obdélník $CFGK$ a čtverec $ABDC$ mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část $CKHA$, takže
taky čtverec $AHGF$ a obdélník $KDHB$ mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx - b^2 = 0.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

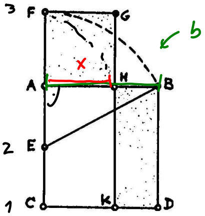
$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}b.$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0\ldots$

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 21) a z Pythagorovy věty (s. 14):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2, \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako



$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$

Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b-x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad \boxed{x^2 + bx - b^2 = 0.}$$

✓

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0\ldots$

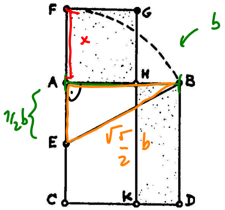
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 21) a z Pythagorovy věty (s. 14):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2, \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b-x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad \boxed{x^2 + bx - b^2 = 0.}$$

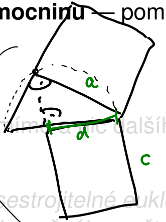
Postupně sestrojené veličiny jsou: pyth. věta

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| \overset{!}{=} \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b. \qquad ?$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0\ldots$

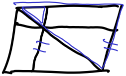
Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce, ✓
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,[19]
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.



$a^2 = d \cdot c$

$a = \sqrt{d \cdot c}$



$1, a, b$

$\rightsquigarrow a \cdot b$

$a : b$

✓

Nic dalšího neumíme a nic dalšího ani sestrojit nelze:

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{} \quad (\quad)$

[19] Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. ??.

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,[19]
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Nic dalšího neumíme a nic dalšího ani sestrojit nelze:

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\ } \quad (\quad)$$

$\Rightarrow$) ??

$\Leftarrow$ ✓

[19] Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. ??.

Důkaz

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$\leftarrow \mathbb{R}$

$\dots\ \mathbb{Z}$

$\dots\ \mathbb{Q}$

$\dots\ \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \dots \left(\mathbb{Q}[\sqrt{3}]\right)[\sqrt{5}]$

Začneme s úsečkou představující jednotku.
Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava dvou lineárních rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava lineární a kvadratické rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme . . .
Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací!

a) $ax+by=c$ $\quad A=[x,y]$

(b) $ax+by=c$ $\quad S=[m,n]$ $\quad (x+m)^2+(y+n)^2=r^2$

(c)

Poznámka

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Důkaz

Začneme s úsečkou představující jednotku.
Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava dvou lineárních rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava lineární a kvadratické rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...
Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Poznámka

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Důkaz

Začneme s úsečkou představující jednotku.
Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava dvou lineárních rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava lineární a kvadratické rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, . . .
Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! $\square$

Poznámka

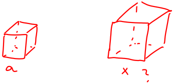
Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $\boxed{x^2 + bx + c = 0}$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.}$$

$\pm \;\; \cdot \;\; : \;\; \sqrt{\ }$



$x^3 = 2a^3$

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,

(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,

(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,

(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,

(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. **??**)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[20]

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

- problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

[20] r. 1767, resp. 1882

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,

(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,

(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,

(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,

(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s **??**)

$x^2 = \pi r^2$

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[20]

$x^3 = 8$

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

- problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

[20] r. 1767, resp. 1882

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,
(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,
(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,
(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,
(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. **??**)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[20]

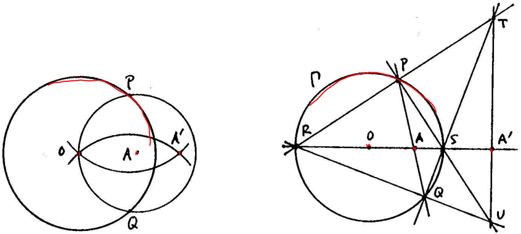
Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

- problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

[20] r. 1767, resp. 1882

Mascheroniovské a steinerovské konstrukce

- Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.
- Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.
- Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

Věta

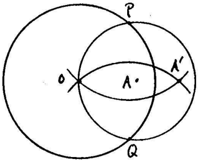
Konstrukce je proveditelná eukleidovsky $\iff$ je proveditelná mascheroniovsky $\iff$ je proveditelná steinerovsky.[21]

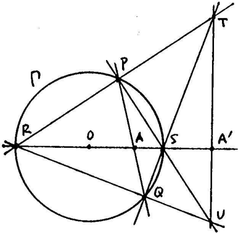
[21] Tvrzení vyplývá z předchozího (s. 25); obvykle však **nebývá** jasné, jak odpovídající konstrukce provést...

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.





Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

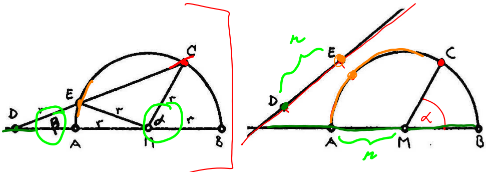
Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky $\iff$ je proveditelná mascheroniovsky $\iff$ je proveditelná steinerovsky.[21]

[21] Tvrzení vyplývá z předchozího (s. 25); obvykle však **nebývá** jasné, jak odp. konstrukce provést. . .

Konstrukce *neusis*

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)



Archimédés: Trisekce úhlu s označeným pravítkem. . .

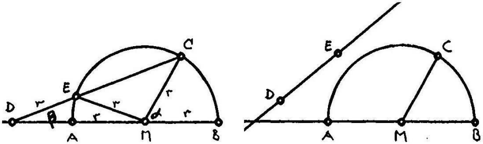
$\beta = \frac{\alpha}{3}$ pro lib. α

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 26. . . [22]

[22] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)



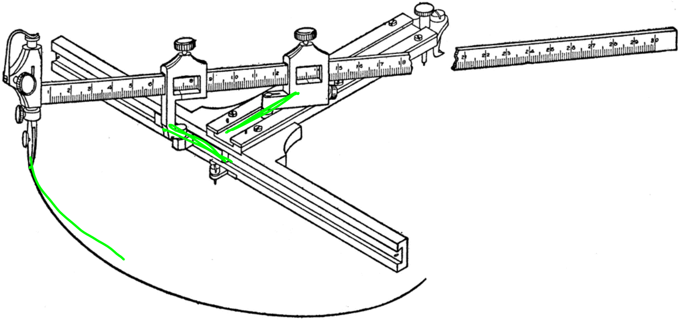
Archimédés: Trisekce úhlu s označeným pravítkem. . .

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 26. . . [22]

[22] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

Užitek



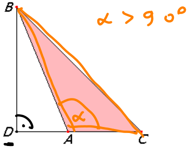
Konstrukce elipsy pomocí *neusis* udělátka.

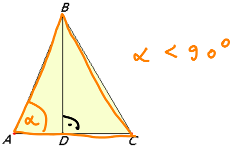
Kosinová věta

Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 14) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde D = pata výšky z vrcholu B, platí:





$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC, \qquad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 =$$
$$= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square$$

Poznámka

Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

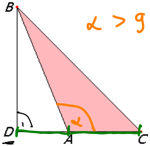
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Kosinová věta

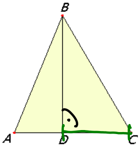
Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 14) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde $D =$ pata výšky z vrcholu B, platí:



$\alpha > 90^\circ$



$\alpha < 90^\circ$

$DC = AC - DA$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC, \qquad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$BC^2 \overset{1}{=} BD^2 + DC^2 \overset{2}{=} BD^2 + (DA + AC)^2 \overset{3}{=} BD^2 + DA^2 + 2DA \cdot AC + AC^2$$

$$\overset{3}{=} (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC \overset{4}{=} BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square$$

Poznámka

Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

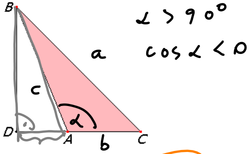
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

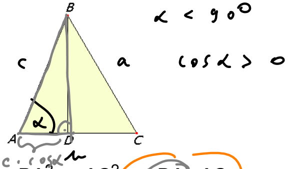
Kosinová věta

Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 14) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde D = pata výšky z vrcholu B, platí:





$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC, \qquad BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 =$$
$$= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square$$

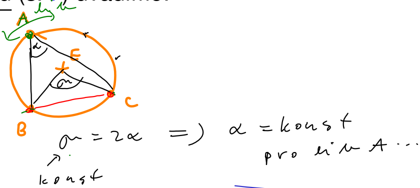
Poznámka

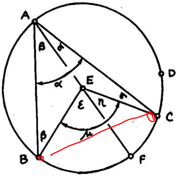
Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.}$$

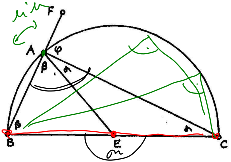
Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 7) uvádíme:[23]

- větu o středovém a obvodovém úhlu,
- spec. případ — Thaletovu větu,
- větu o úsekovém úhlu,
- apod.



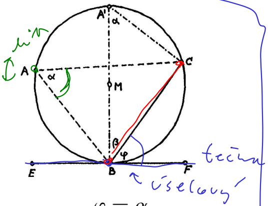


$\mu = 2\alpha =$ konst.



$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\mu = 180°$



$\varphi = \alpha$

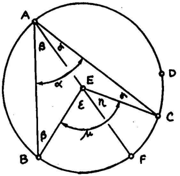
Mocnost bodu ke kružnici ...

[23]https://ggbm.at/MtseAe67

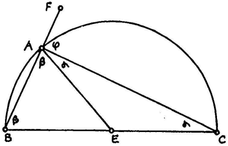
O kružnicích

Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 7) uvádíme:[23]

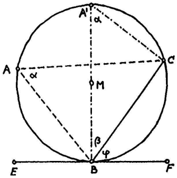
- větu o středovém a obvodovém úhlu,
- spec. případ — Thaletovu větu,
- větu o úsekovém úhlu,
- apod.



$\mu = 2\alpha =$ konst.



$\alpha + \beta = 90^\circ$



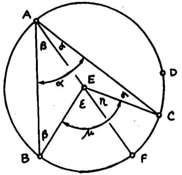
$\varphi = \alpha$

[23] https://ggbm.at/MtseAe67

Pro kružnici se středem *E* a úseč *BC* je úhel *BEC* *středový* (ozn. μ) a úhel *BAC* *obvodový* (ozn. α):

Věta

Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ($\mu = 2\alpha$).
Proto jsou obvodové úhly k téže úseči ***všechny stejné****.*



Důkaz.

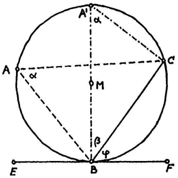
- Trojúhelník *ABE* je rovnoramenný $\implies$ úhly u základny jsou stejné (ozn. β).
- Věta o součtu úhlů v trojúhelníku *ABE* $\implies$ vnější úhel $\underline{\varepsilon = 2\beta}$.

Ze stejných důvodů platí také $\eta = 2\gamma$, odkud plyne $\mu = 2\alpha$.
Podobně by se zdůvodnily i ostatní varianty. . . □

Pro kružnici, úseč *BC* a tečnu *BF* je úhel *CBF* *úsekový* (ozn. φ):

Věta

Úsekový úhel k dané úseči je stejný jako úhel obvodový ($\alpha = \varphi$).



Důkaz.

- Věta o obvodovém úhlu $\implies$ úhel *BAC* je stejný pro lib. *A* (ozn. α).
- Vezměme A' tak, aby $A'B$ byl průměrem kružnice ($\angle A'BC$ ozn. β).
  Věta o tečně $\implies$ $\underline{\varphi + \beta = 90^\circ}$.
- Thaletova věta $\implies$ úhel u *C* je pravý.
  Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $A'BC$ $\implies$ $\underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$.

Celkem tedy $\alpha = \varphi$. □

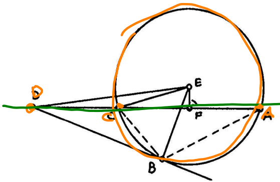
O mocnosti

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*

D vně



lib. sečna

$$DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$$

Důkaz 1.

Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (pro pravoúhlé trojúhelníky *DBE*, *DFE*, *CFE*) a pár úpravami:[24]

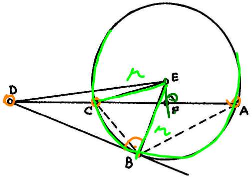
$$DB^2 = DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) =$$
$$= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC.$$

[24] Třeba rozlišovat, zda je bod D uvnitř nebo vně kružnice!

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



← lib. sečna

$$DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$$

Důkaz 1.

3x

Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (pro pravoúhlé trojúhelníky DBE, DFE, CFE) a pár úpravami:[24]

Pyth. ← kružnice pyth. 2x

$$\text{konst}\quad DB^2 = DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + \cancel{FE^2}) - (\cancel{EF^2} + FC^2) =$$

$$= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC.$$

?

DF + FA = DA   DC

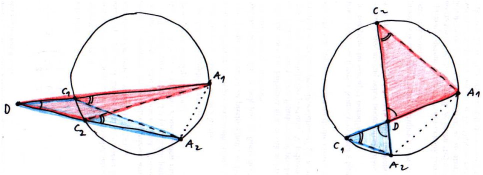
□

[24] Třeba rozlišovat, zda je bod D uvnitř nebo vně kružnice!

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \cdots = \text{konst.}$$

Důkaz 2.

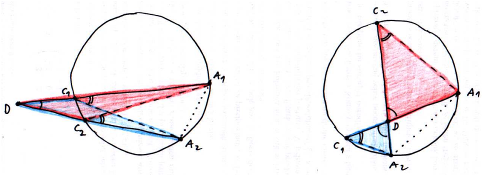
Alternativně (a univerzálně) pomocí podobných trojúhelníků:

- Věta o obvodových úhlech $\Longrightarrow$ vyznačené úhly u vrcholů C_i jsou stejné.
- Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné $\Longrightarrow$ trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou podobné.
- Tedy $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$, což je ekvivalentní $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$. $\square$

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \cdots = \text{konst.}$$

Důkaz 2.

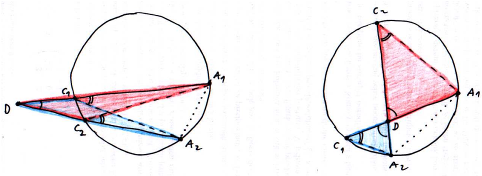
Alternativně (a univerzálně) pomocí podobných trojúhelníků:

- Věta o obvodových úhlech $\Longrightarrow$ vyznačené úhly u vrcholů C_i jsou stejné.
- Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné $\Longrightarrow$ trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou podobné.
- Tedy $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$, což je ekvivalentní $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$. □

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.*



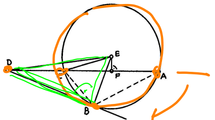
$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \cdots = \text{konst.}$$

Důkaz 2.

Alternativně (a univerzálně) pomocí podobných trojúhelníků:

- Věta o obvodových úhlech $\Longrightarrow$ vyznačené úhly u vrcholů C_i jsou stejné.
- Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné $\Longrightarrow$ trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou podobné.
- Tedy $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$, což je ekvivalentní $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$. $\square$

O mocnosti



$DC \cdot DA = \dots = DB \cdot DB$

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí

$$\underbrace{DC \cdot DA}_{\text{konst}} = \overbrace{DB^2 = DE^2 - EB^2}^{m^2}.$$

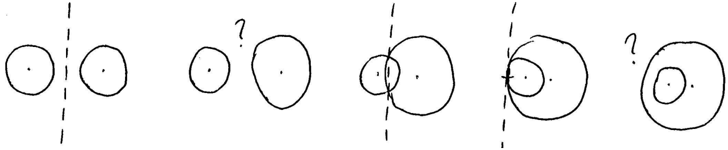
Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2. \qquad \in \mathbb{R}$$

D … vně $\iff m > 0$
uvnitř $\iff m < 0$
na $\iff m = 0$

Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.



Věta

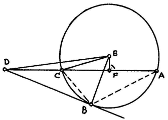
*Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.*[25]

[25] Vyplývá z definice a Pythagorovy věty…

O mocnosti

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí

$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$



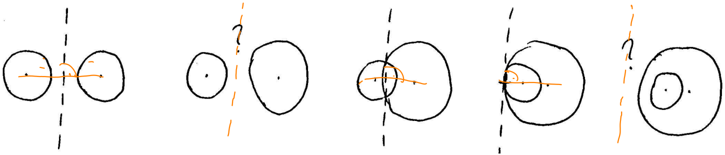
Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

D

$$m := DE^2 - r^2.$$

Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.

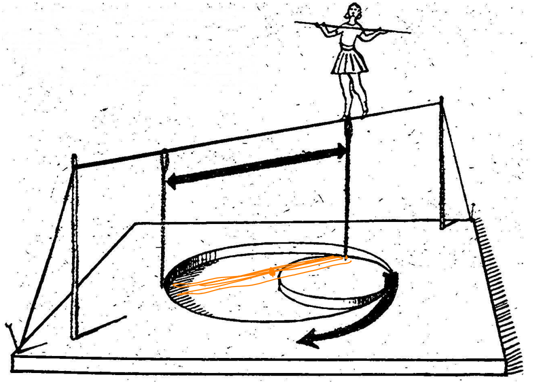


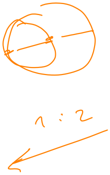
Věta

*Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.*[25]

[25] Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...

Užitek

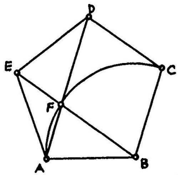


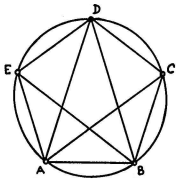


Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý. . .

Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.





Postřehy

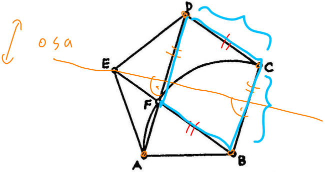
(1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD \implies BCDF$ je kosočtverec.

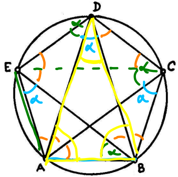
(2) Obvodové úhly BAC, CAD, DAE atd. jsou všechny shodné $\implies$ trojúhelník ABD je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D, tzv. zlatý trojúhelník.

(3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.

Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.





Postřehy

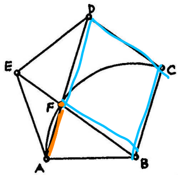
(1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD \implies BCDF$ je kosočtverec.

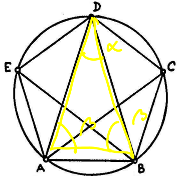
(2) Obvodové úhly BAC, CAD, DAE atd. jsou všechny shodné $\implies$ trojúhelník ABD je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D, tzv. zlatý trojúhelník.

(3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.

Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.





$\beta = 2\alpha$

Postřehy

(1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD \implies BCDF$ je kosočtverec.

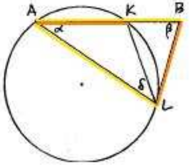
(2) Obvodové úhly BAC, CAD, DAE atd. jsou všechny shodné $\implies$ trojúhelník ABD je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D, tzv. zlatý trojúhelník.

(3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.

Zlatý trojúhelník

Pravidelný 5-úhelník lze sestrojit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestrojit pomocí zlatého řezu:

zlatý řez



Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:
*poměr ramene a základny je **zlatý** $\iff$ trojúhelník je **zlatý**.*

Důkaz.

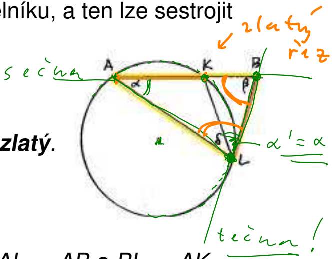
Předp. AK = delší část zlatého řezu AB, L takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, chceme $\beta \overset{?}{=} 2\alpha$:

- K = zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ = obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \beta = \alpha + \delta$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \alpha = \delta$.

Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$. □

Zlatý trojúhelník

Pravidelný 5-úhelník lze sestrojit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestrojit pomocí zlatého řezu:



Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:
*poměr ramene a základny je **zlatý** $\iff$ trojúhelník je **zlatý**.*

Důkaz.

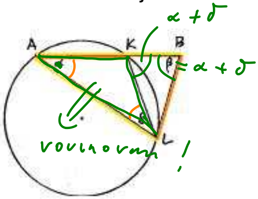
Předp. AK = delší část zlatého řezu AB, L takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, chceme $\beta = 2\alpha$:

- K = zlatý řez a $AK = BL \implies$ $\boxed{AB : BL = BL : BK}$ neboli $\boxed{BA \cdot BK \overset{!}{=} BL^2}$. ✓
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ = obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \beta = \alpha + \delta$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \alpha = \delta$.

Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$. □

Zlatý trojúhelník

Pravidelný 5-úhelník lze sestrojit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestrojit pomocí zlatého řezu:



Věta

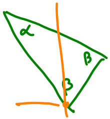
V rovnoramenném trojúhelníku platí:
*poměr ramene a základny je **zlatý** $\iff$ trojúhelník je **zlatý**.*

Důkaz.

Předp. AK = delší část zlatého řezu AB, L takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, chceme $\boxed{\beta = 2\alpha}$: ✓

- K = zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ = obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \boxed{\beta = \alpha + \delta}$. ✓
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \boxed{\alpha = \delta}$. ✓

Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$.



$\beta = 2\alpha$

$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$

5α

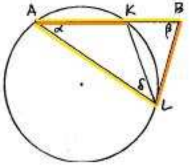
$\boxed{\alpha = 36^\circ}$

Zlatý trojúhelník

Pravidelný 5-úhelník lze sestrojit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestrojit pomocí zlatého řezu:

Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:
*poměr ramene a základny je **zlatý*** $\Longleftrightarrow$ *trojúhelník je **zlatý**.*



Důkaz.

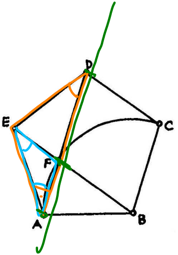
Předp. $AK =$ delší část zlatého řezu AB, L takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, chceme $\beta = 2\alpha$:

- $K =$ zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL =$ tečna.
- Úsekový $\angle BLK =$ obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \underline{\alpha = \delta}$.

Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$. $\square$

Zlatý řez přímo

Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:



Věta

Úhlopříčky pravidelného 5-úhelníku se protínají v poměrech ***zlatého řezu****. . .*[26]

Důkaz.

- Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu A $\implies$ jsou podobné.
- Odpovídající si strany jsou úměrné $\implies$ $AD : DE = EA : AF$.
- Současně však platí $DE = EA = DF$, tedy

$$AD : DF = DF : FA. \qquad \square$$

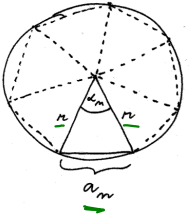
* F ... zlatý řez AD

[26]. . . jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.

Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360°/n$.

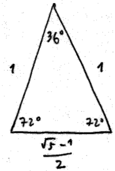
Velikost strany pravidelného n-úhelníku
veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



← $n=5$

Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36°$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72°$.



Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ←

Po dosazení dostáváme

$$\boxed{a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.}$$

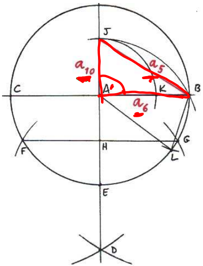
⇒ ① lze sestrojit
② víme JAK!

Zkratka a něco navíc

Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL:

Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou ***pravoúhlého trojúhelníku****, jehož odvěsnami jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.*



Důkaz.

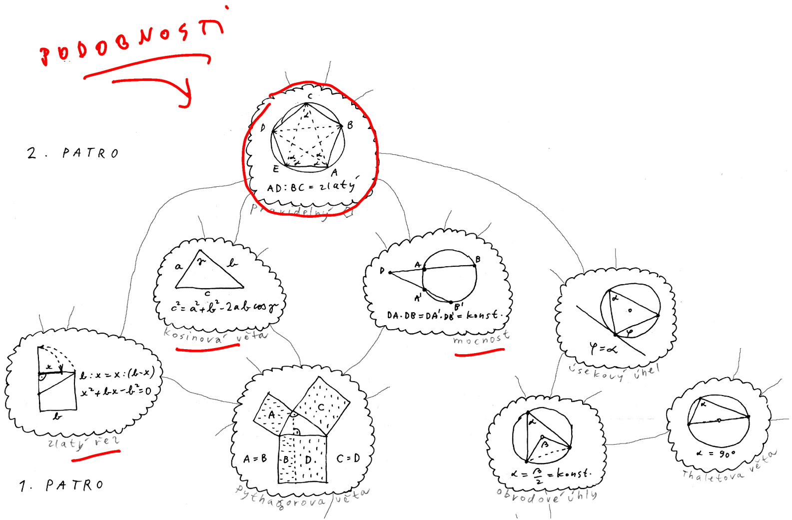
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \qquad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABJ platí

$$|BJ| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

Mezishrnutí (navazuje na s. 19, pokračování na s. 66)



Další pravidelné mnohoúhelníky

- Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.
- Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \dots$
- Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $\boxed{n = \mathbf{15}}, \dots$

„$3 \cdot 5$"

Věta

Pokud lze sestrojit pravidelný $\mathbf{k}$-úhelník a $\mathbf{l}$-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný $\mathbf{n}$-úhelník, kde $\mathbf{n}$ = nejmenší společný násobek $\mathbf{k}$ a $\mathbf{l}$.[27]

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné.
Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

$$\left(\frac{a}{\boldsymbol{k}} + \frac{b}{\boldsymbol{l}}\right) \cdot 360^\circ = \frac{a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}} \cdot 360^\circ.$$

Bezout: $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné $\Longrightarrow a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k} = 1$, pro nějaká celá čísla $a, b, \dots$

$\dots$, tedy umíme středový úhel $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}$-úhelníku. □

[27] Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Další pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}, \ldots$

Věta

Pokud lze sestrojit pravidelný $\boldsymbol{k}$-úhelník a $\boldsymbol{l}$-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný $\boldsymbol{n}$-úhelník, kde $\boldsymbol{n} =$ nejmenší společný násobek $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{l}$.[27]

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné.
Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

$$\left(\frac{a}{\boldsymbol{k}} + \frac{b}{\boldsymbol{l}}\right) \cdot 360^\circ = \frac{a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}} \cdot 360^\circ.$$

Bezout: $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné $\Longrightarrow a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k} = 1$, pro nějaká celá čísla $a, b, \ldots$

$\ldots$, tedy umíme středový úhel $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}$-úhelníku. □

[27] Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}, \ldots$

Věta

Pokud lze sestrojit pravidelný $\boldsymbol{k}$-úhelník a $\boldsymbol{l}$-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný $\boldsymbol{n}$-úhelník, kde $\boldsymbol{n}$ = nejmenší společný násobek $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{l}$.[27]

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné.
Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

$$\left(\frac{a}{\boldsymbol{k}} + \frac{b}{\boldsymbol{l}}\right) \cdot 360^\circ = \frac{a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}} \cdot 360^\circ.$$

$\frac{1}{k \cdot l}$ ...

Bezout: $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné $\Longrightarrow a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k} = 1$, pro nějaká celá čísla $a, b, \ldots$

$\ldots$, tedy umíme středový úhel $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}$-úhelníku.

NSD

□

[27] Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Detail pro $k = 3$ a $l = 5$ [28]

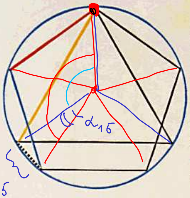
$\rightsquigarrow$ 15-úh.

$k \cdot l$

$$\alpha_{15} = \frac{2}{5}\cdot 360^\circ - \frac{1}{3}\cdot 360^\circ = \frac{2\cdot 3 - 1\cdot 5}{3\cdot 5}\cdot 360^\circ = \frac{1}{15}\cdot 360^\circ$$

✓

!



TO *inscribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.*

Let ——— and ——— be the sides of an equilateral pentagon inscribed in the given circle, and ——— the side of an inscribed equilateral triangle.

The arc subtended by ——— and ——— $\Big\} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Big\{$ of the whole circumference.

The arc subtended by ——— $\Big\} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \Big\{$ of the whole circumference.

Their difference $= \frac{1}{15}$

∴ the arc subtended by .... $= \frac{1}{15}$ difference of the whole circumference.

Hence if straight lines equal to .... be placed in the circle (B. 4. pr. 1), an equilateral and equiangular quindecagon will be thus inscribed in the circle.

Q. E. D.

[28] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book4/images/bookIV-prop16.html

Další sestrojitelné mnohoúhelníky

Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni[29] je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

lze	**3**	4	**5**	6		8		10		12			15	16	**17**			20		
nelze					7		9		11		13	14				18	19		21	22

[29] 30. března 2021, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

Další sestrojitelné mnohoúhelníky

Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *n je součinem libovolné mocniny* 2 *a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni[29] je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

lze	**3**	4	**5**	6		8		10		12			15	16	**17**			20		
nelze					7		9		11		13	14				18	19		21	22

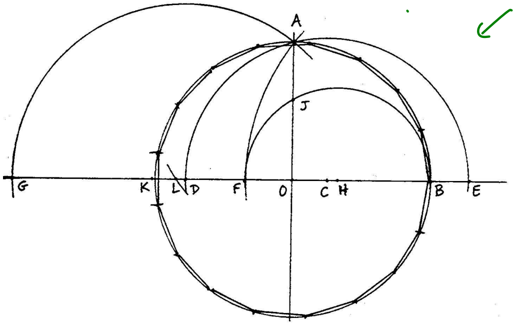
[29] 30. března 2021, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

Pravidelný 17-úhelník

Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

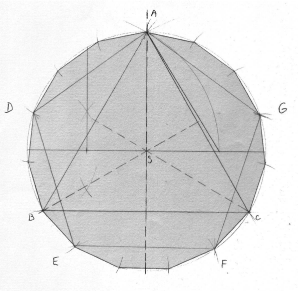
$$a_{17} = \frac{r}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}.$$

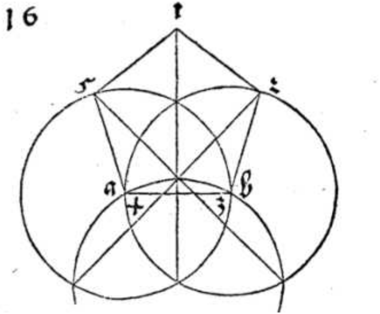
Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto[30]



[30] 30. března 1796, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon

Užitek





Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných. . .

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \gtreqqless mb \iff nc \gtreqqless md.$$

w.t.F.

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.
Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:[31]
Reálná čísla r $(= \frac{a}{b})$ a s $(= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo q $(= \frac{m}{n})$ platí

$$r \gtreqqless q \iff s \gtreqqless q.$$

[31] Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Úměrnosti

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \gtreqqless mb \iff nc \gtreqqless md.$$

$+, ', ', \leq$!

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.
Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:[31]
Reálná čísla r $(= \frac{a}{b})$ a s $(= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo q $(= \frac{m}{n})$ platí

$$r \gtreqqless q \iff s \gtreqqless q.$$

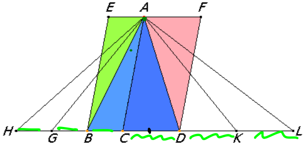
$\leq$ $\mathbb{Q}$ $\sqrt{3}$

[31] Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Základní tvrzení o poměrech obsahů

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



$$\underbrace{\text{obsah } ACB}_{a} : \underbrace{\text{obsah } ACD}_{b} \overset{?}{=} \underbrace{CB}_{c} : \underbrace{CD}_{d}$$

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 15) a z definice rovnosti poměrů (s. 53)...

$$n \cdot a \gtreqless m \cdot b \Leftrightarrow n \cdot c \gtreqless m \cdot d \quad \square$$

Poznámka

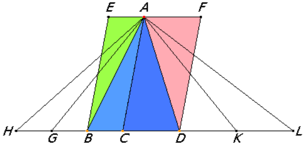
Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a.

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



obsah ACB : obsah $ACD \overset{?}{=} CB : CD$ ← $\mathbb{R}$

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 15) a z definice rovnosti poměrů (s. 53)... □

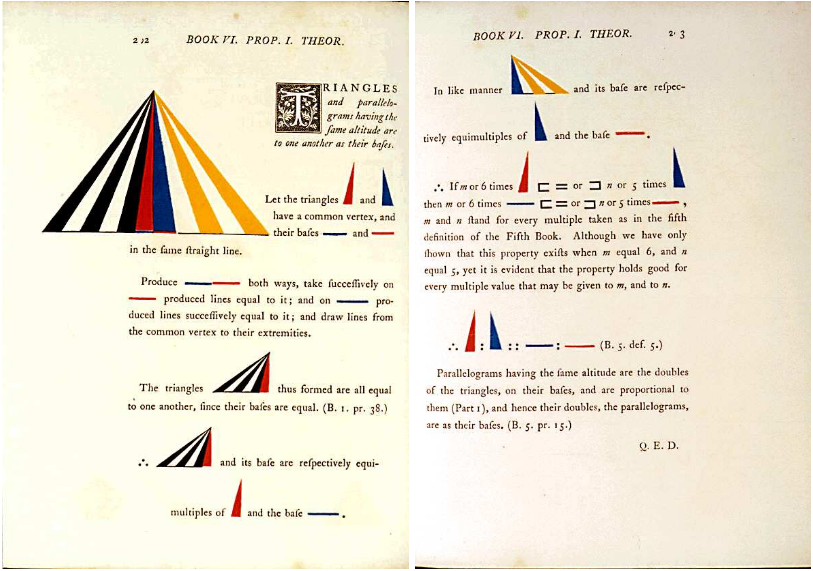
Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot v,} \quad !!$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a.

Detail k větě o poměrech obsahů[32]



2 12 BOOK VI. PROP. I. THEOR.

TRIANGLES and parallelograms having the ſame altitude are to one another as their baſes.

Let the triangles and have a common vertex, and their baſes —— and —— in the ſame ſtraight line.

Produce —— —— both ways, take ſucceſſively on —— produced lines equal to it; and on —— produced lines ſucceſſively equal to it; and draw lines from the common vertex to their extremities.

The triangles thus formed are all equal to one another, ſince their baſes are equal. (B. 1. pr. 38.)

∴ and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe ——.

BOOK VI. PROP. I. THEOR. 213

In like manner and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe ——.

∴ If m or 6 times ⊏ = or ⊐ n or 5 times then m or 6 times —— ⊏ = or ⊐ n or 5 times ——, m and n ſtand for every multiple taken as in the fifth definition of the Fifth Book. Although we have only ſhown that this property exiſts when m equal 6, and n equal 5, yet it is evident that the property holds good for every multiple value that may be given to m, and to n.

∴ : :: —— : —— (B. 5. def. 5.)

Parallelograms having the ſame altitude are the doubles of the triangles, on their baſes, and are proportional to them (Part 1), and hence their doubles, the parallelograms, are as their baſes. (B. 5. pr. 15.)

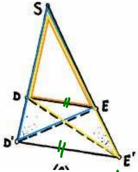
Q. E. D.

32 http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop1.html

Základní tvrzení o poměrech ramen

Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku $\iff$ protíná zbylé dvě strany úměrně.



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

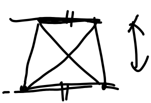
Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE. Tedy:

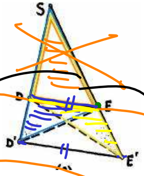
Rovnost poměrů $SD' : SD$ a $SE' : SE$ $\iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D$ $\iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 15). □

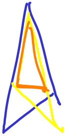
Základní tvrzení o poměrech ramen

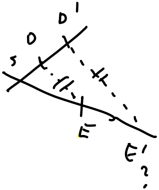
Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku $\iff$ *protíná zbylé dvě strany úměrně.*









$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

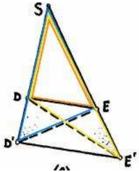
Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE. Tedy:

Rovnost poměrů $SD' : SD$ a $SE' : SE$ $\iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D$ $\iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 15). □

Základní tvrzení o poměrech ramen

Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku $\iff$ *protíná zbylé dvě strany úměrně.*



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

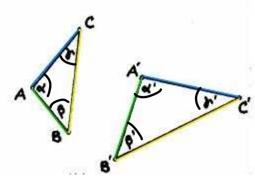
Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE. Tedy:

Rovnost poměrů $SD' : SD$ a $SE' : SE$ $\iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D$ $\iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 15). □

Podobné trojúhelníky

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

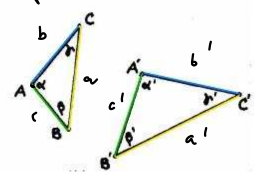
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti}.$$

Podobné trojúhelníky

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$\to \quad b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

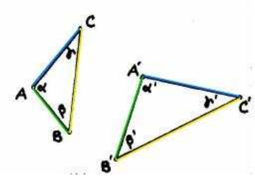
$$\to \quad a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti}.$$

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 57) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c', \; c : a = c' : a', \; a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 56)...

Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník ABD, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$.

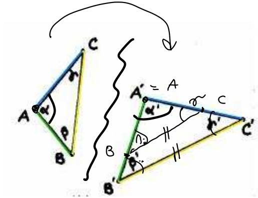
Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 57) jsou ekvivalentní:

Věta

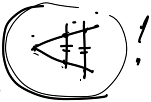
Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ (\gamma = \gamma') \iff b : c = b' : c',\ c : a = c' : a',\ a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

⇒ Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 56)...



Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník *ABD*, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem *A′B′C′*.

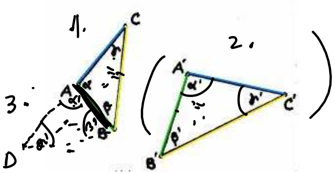
Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky *ABD* a *ABC* mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 57) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c',\ c : a = c' : a',\ a : b = a' : b'.$$

$\Leftarrow$

Důkaz.

⇒ Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 56)...

$\Leftarrow$ Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník ABD, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$.

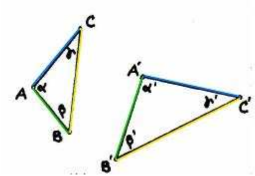
Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 57) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



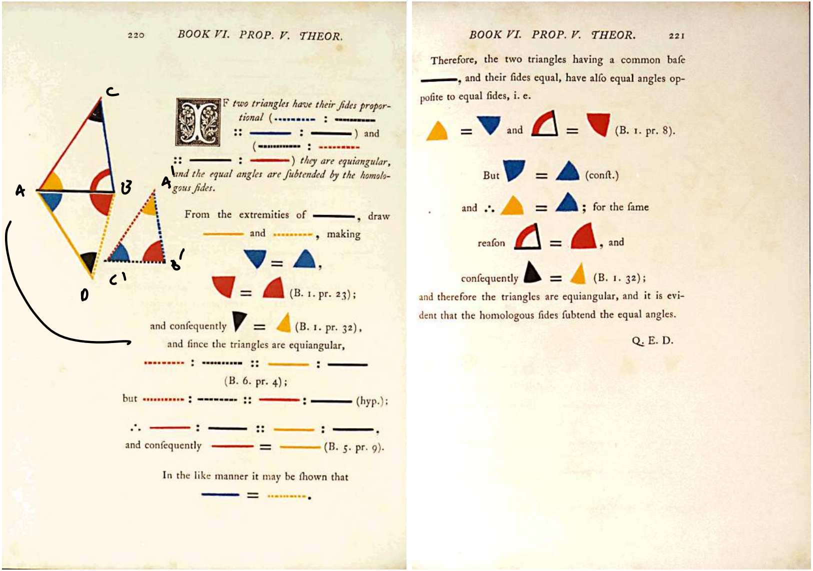
$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c',\ c : a = c' : a',\ a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 56)...

Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník *ABD*, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$.
Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky *ABD* a *ABC* mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □

Detail k implikaci „$\Longleftarrow$“[33]



220 BOOK VI. PROP. V. THEOR.

If two triangles have their sides proportional (:) :: (:) *and* (:) :: (:) *they are equiangular, and the equal angles are subtended by the homologous sides.*

From the extremities of , draw and , making = , = (B. 1. pr. 23); and consequently = (B. 1. pr. 32), and since the triangles are equiangular,

: :: : (B. 6. pr. 4);

but : :: : (hyp.);

∴ : :: : .

and consequently = (B. 5. pr. 9).

In the like manner it may be shown that = .

BOOK VI. PROP. V. THEOR. 221

Therefore, the two triangles having a common base , and their sides equal, have also equal angles opposite to equal sides, i. e.

= and = (B. 1. pr. 8).

But = (const.)

and ∴ = ; for the same reason = , and consequently = (B. 1. pr. 32); and therefore the triangles are equiangular, and it is evident that the homologous sides subtend the equal angles.

Q. E. D.

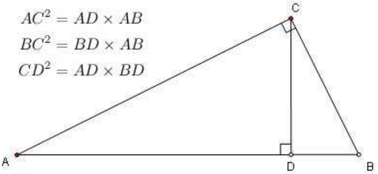
[33] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop5.html

Poznámky

Implikaci „$\Longrightarrow$“ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- Věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 37).
- Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 43).
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 14):



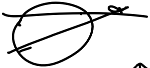
Důkaz.
Trojúhelníky *ADC* a *ACB* mají po dvou shodné vnitřní úhly $\Longrightarrow$ jsou podobné $\Longrightarrow$ $AC : AD = AB : AC$ $\Longrightarrow$ $AC^2 = AB \cdot AD$.
Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně… □

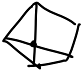
Poznámky

$\alpha = \alpha' \; \dots \; \Rightarrow \; a : a' = b : b' = c : c'$

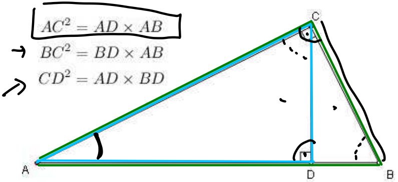
Implikaci „$\Longrightarrow$“ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:





- Věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 37).
- Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 43).
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 14):

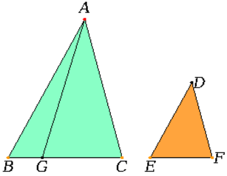


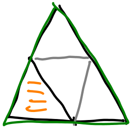
Důkaz.
Trojúhelníky *ADC* a *ACB* mají po dvou shodné vnitřní úhly $\Longrightarrow$ jsou podobné
$\Longrightarrow$ $AC : AD = AB : AC$ $\Longrightarrow$ $AC^2 = AB \cdot AD$
Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně. . . □

O obsazích podobných útvarů

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.





$k = 2, 3, \dots \mathbb{Z}$

$\dots \mathbb{Q}$

$k \in \mathbb{R}$

Je-li koeficient podobnosti $= k$, potom poměr obsahů $= k^2$.

Důkaz[34].

Pomocný bod $G \in BC$ je takový, že

$$EF : BG = BC : EF = \cdots = AB : DE = k : 1$$

neboli $BC : BG = (BC : EF) \cdot (EF : BG) = k^2 : 1$.

Z rovnosti $EF : BG = AB : DE$ vyplývá, že obsah DEF = obsah ABG (s. 56). Odtud dostáváme (s. 54):

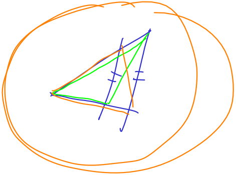
$$\text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF = \text{obsah } ABC : \text{obsah } ABG = BC : BG = k^2 : 1. \quad \square$$

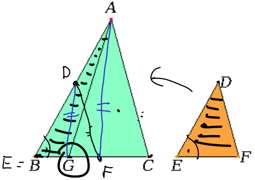
[34] …**bez** infinitezimálních úvah pro obecné $k \in \mathbb{R}$!

O obsazích podobných útvarů

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.





Je-li koeficient podobnosti $= k$, potom poměr obsahů $= k^2$.

$k \in \mathbb{R}$

Důkaz[34].

Pomocný bod $G \in BC$ je takový, že

trik

$$EF : BG = BC : EF = \cdots = AB : DE = k : 1$$

neboli $BC : BG = (BC : EF) \cdot (EF : BG) = k^2 : 1$.

Z rovnosti $EF : BG = AB : DE$ vyplývá, že obsah DEF = obsah ABG (s. 56). Odtud dostáváme (s. 54):

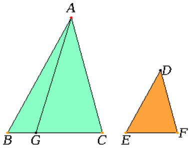
$$\text{obsah } ABC : \text{obsah } DEF = \text{obsah } ABC : \text{obsah } ABG = BC : BG = k^2 : 1. \quad \square$$

[34] . . . **bez** infinitezimálních úvah pro obecné $k \in \mathbb{R}$!

O obsazích podobných útvarů

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.



Je-li koeficient podobnosti $= k$, potom poměr obsahů $= k^2$.

Poznámky k důkazu

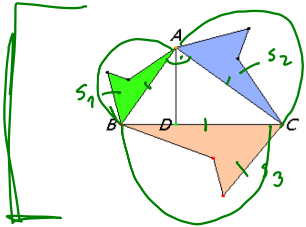
Snadné pro $k \in \mathbb{Z}$, resp. $k \in \mathbb{Q}$. (dělení na menší navzájem shodné trojúhelníčky)

Problematické pro $k \in \mathbb{R}$ — možné přístupy:

- limitní přechod, (libovolně jemné dělení)
- vzoreček, (viz s. 54)
- "elementární" trik.
  (pomocný bod $G \in BC$ takový, že $EF : BG = \cdots = k : 1$; úpravy a předchozí základní tvrzení $\rightsquigarrow$ obsah ABC : obsah DEF = obsah ABC : obsah $ABG = k^2 : 1$)

Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.



$S_3 = S_1 + S_2$

Důkaz.

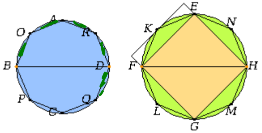
Plyne z předchozího tvrzení (s. 61) a z Pythagorovy věty (s. 14)... □

O obsazích kruhů

U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhneme. . . [34]

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.
Každé dva kruhy jsou podobné a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.
Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 61). . . □

Poznámka

Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.}$$

$<$ $\rightsquigarrow$ SPOR
$>$ $\rightsquigarrow$ SPOR

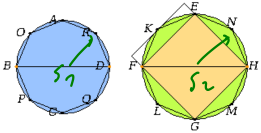
[34] . . . v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

O obsazích kruhů

U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhneme. . . [34]

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.
Každé dva kruhy jsou podobné a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.
Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 61). . . □

Poznámka

π

Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.}$$

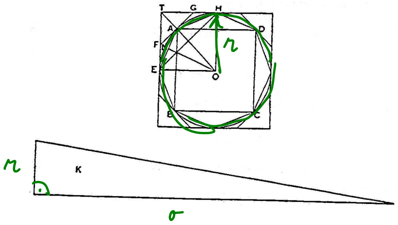
?

[34] . . . v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

O obsahu a obvodu kruhu[35]

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



Poznámky

Jinými slovy: $\boxed{S = \frac{1}{2} r \cdot o}$, kde $r =$ poloměr kružnice a $o =$ její obvod.
To spolu s rovností na s. 63 dává

$$S = \frac{1}{2} r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!
Při tradičním značení:

$$\boxed{S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.}$$

---

[35] https://en.wikipedia.org/wiki/Area_of_a_circle#Archimedes's_proof

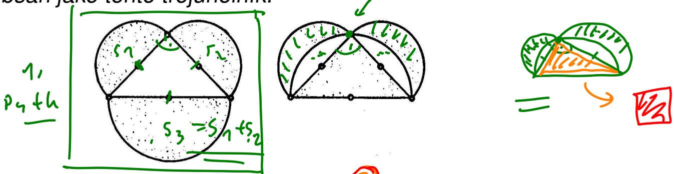
Poznámky ke kvadratuře

Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat umíme (s. 17), kruh neumíme (s. 26).

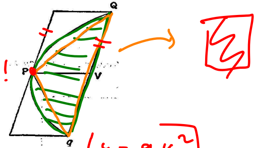
Některé křivočaré útvary však kvadraturovat lze:

- Hippokratés: *Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají stejný obsah jako tento trojúhelník.*[36]

2. Thalet.



- Archimédés: *Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku).*[37]

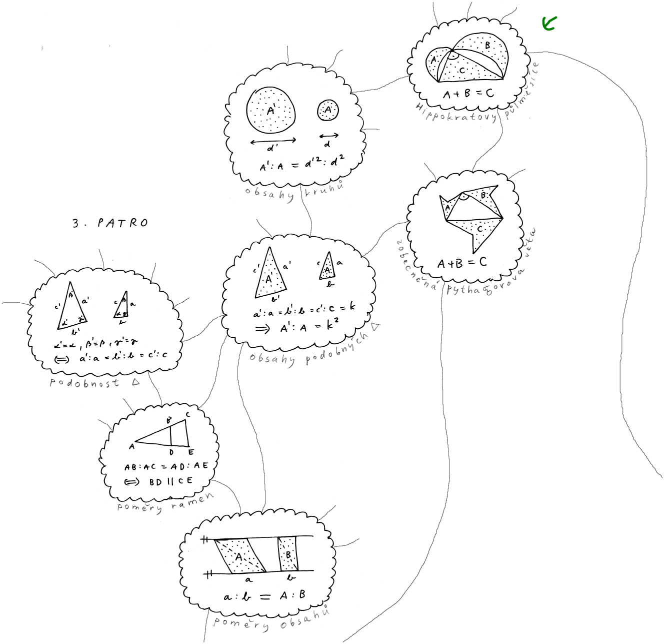


$\boxed{y = ax^2}$ . . .

[36] plyne snadno z tvrzení na s. 63, 62 a 33...

[37] plyne z vlastností paraboly a součtu jisté geometrické řady...

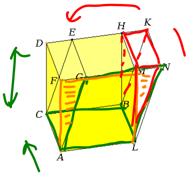
Mezishrnutí (navazuje na s. 46, pokračování na s. 72)

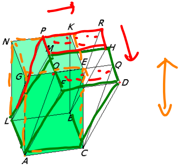


O objemech rovnoběžnostěnů (a hranolů)

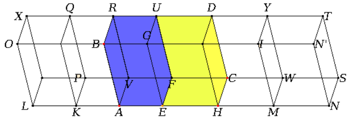
K tvrzením o rovnoběžnících (s. 13, s. 54, s. 61) máme tyto 3D **analogie**:

- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.





- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.

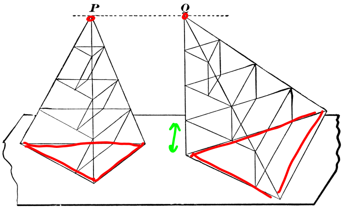


- Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázku jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

Věta

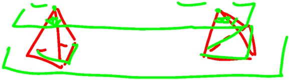
Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



Idea důkazu.

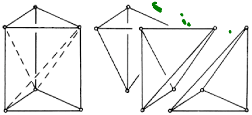
Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem hranolů.
Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami.
Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 68)... □

Poznámky



- Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[38]

- Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:



Teprve odtud máme vzorečky

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S \cdot v,}$$

kde $V =$ objem jehlanu, $S =$ obsah podstavy a $v =$ velikost odpovídající výšky.

Pozor

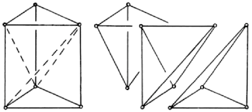
Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů![39]

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 17) obecně **neplatí**.

[38] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[38]



Z uvedeného např. vyvozujeme, že
objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde V = objem jehlanu, S = obsah podstavy a v = velikost odpovídající výšky.

Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů![39]

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 17) obecně **neplatí**.

[38] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

O válcích, kuželích, koulích

S podobnými úvahami jako na s. 69 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav,*
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů,*
- *objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu jemu opsaného válce,*
- apod.

Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

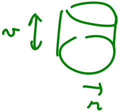
Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.[40]

[40] viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip

S podobnými úvahami jako na s. 69 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav,*
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů,*
- *objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu jemu opsaného válce,*
- apod.



$V = (\pi r^2) \cdot v$

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$\frac{2}{3}$

$V = (\pi r^2) \cdot (2r)$

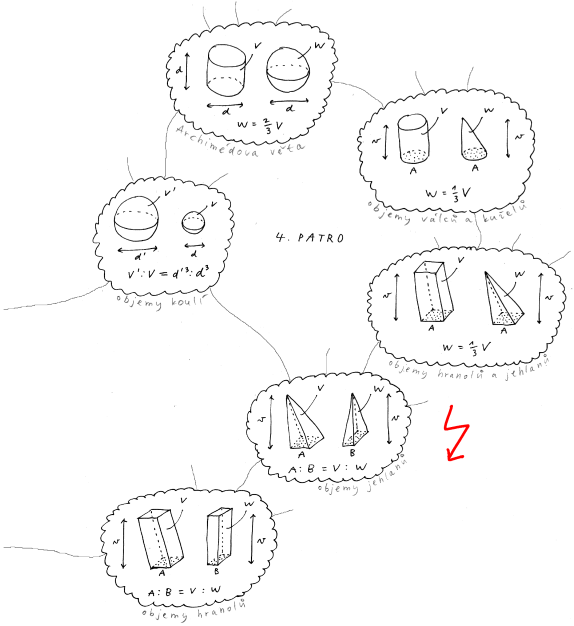
Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.[40]

[40] viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip

Mezishrnutí (navazuje na s. 66, pokračování na s. 81)

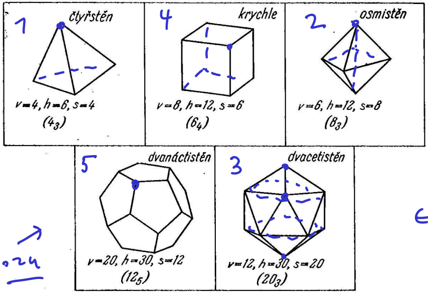


Platónská tělesa

= *pravidelné konvexní mnohostěny*
= konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky[41].

Věta

Platónských těles je právě pět druhů:



← DÚ

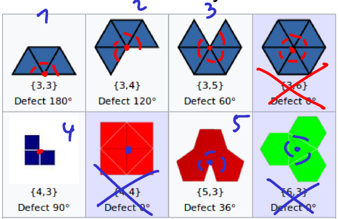
pozn

[41] $\Longrightarrow$ mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.

Důkaz

(1) Platónských těles není víc než pět druhů:
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:

$\lneqq 360^\circ$



. . . . .

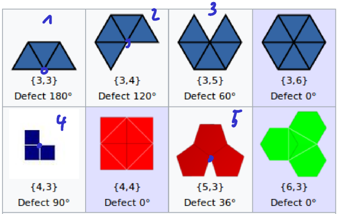
A vertex needs at least 3 faces, and an angle defect.
A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling.
By Descartes' theorem, the number of vertices is 720°/*defect*.

(2) Platónských těles je právě pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

- čtyřstěn $\{3, 3\}$, krychle $\{4, 3\}$, osmistěn $\{3, 4\}$ jsou snadné,
- pro rozbor dvacetistěnu $\{3, 5\}$ a dvanáctistěnu $\{5, 3\}$ budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 45)...

Důkaz

(1) Platónských těles není víc než pět druhů:
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:



A vertex needs at least 3 faces, and an angle defect.
A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling.
By Descartes' theorem, the number of vertices is 720°/*defect*.

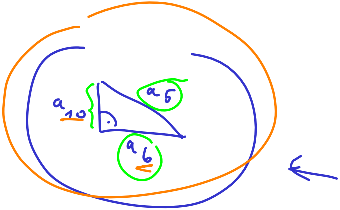
(2) Platónských těles je právě pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

- čtyřstěn $\{3,3\}$, krychle $\{4,3\}$, osmistěn $\{3,4\}$ jsou snadné,
- pro rozbor dvacetistěnu $\{3,5\}$ a dvanáctistěnu $\{5,3\}$ budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 45)...

Pravidelný dvacetistěn poprvé

Bubínek:

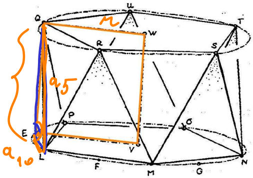
$QL = QR =$ strana vepsaného 5-úhelníku,
$LE =$ strana vepsaného 10-úhelníku,
$LEQ =$ pravoúhlý trojúhelník.

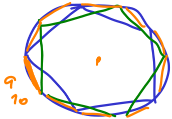


Proto podle s. 45:

- *$EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku $=$ poloměr kružnice.*

$M = ?$





$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

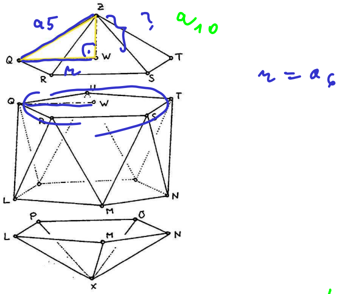
Pravidelný dvacetistěn podruhé

Čepičky:

QWZ = pravoúhlý trojúhelník,
$QZ = QR$ = strana vepsaného 5-úhelníku,
QW = strana vepsaného 6-úhelníku.

Proto podle s. 45:

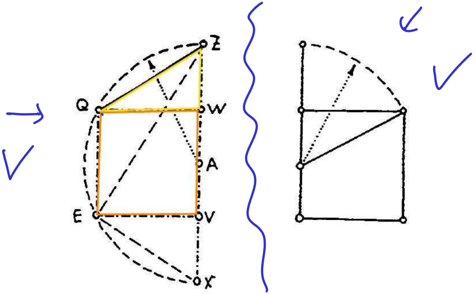
- *WZ = strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.*



WZ = delší část zlatého řezu úsečky WQ.

!

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule...



Řez dvacetistěnu a řez zlatý.[42]

[42]viz konstrukci na s. 22

Pravidelný dvanáctistěn stručně

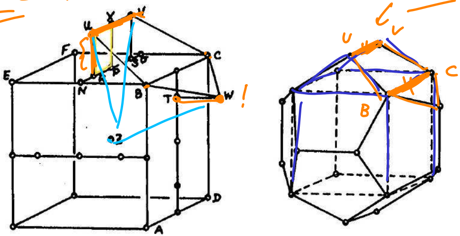
Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy *U*, *V*, *W* podle obr. . .

. . . a postupně se zdůvodní, že:

- body *UBCWV* leží v jedné rovině,
- pětiúhelník *UBCWV* je pravidelný,
- vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná.

UV : UR = 2 : 1

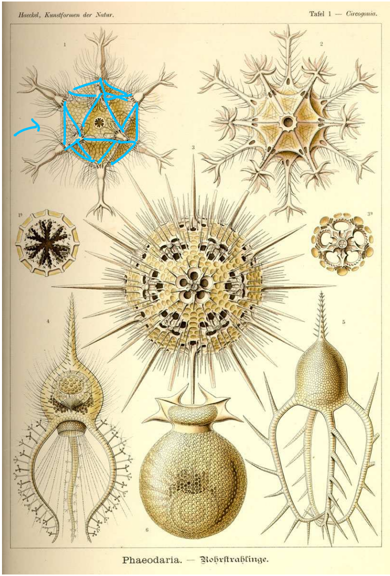
zlatý řez . . . ✓



UV : BC = zlatý

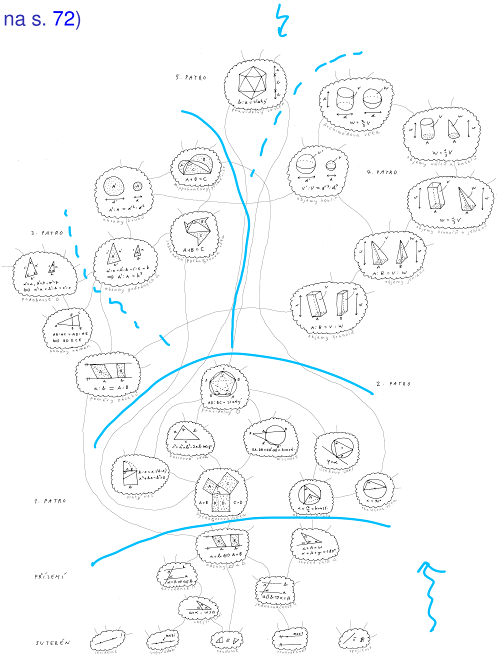
RU = *RP* = delší část zlatého řezu úsečky *PN*.

Užitek



Circogonia icosahedra vlevo nahoře.

Shrnutí[43] (navazuje na s. 72)

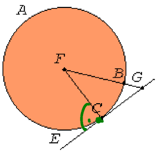


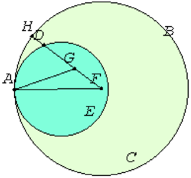
[43] https://is.muni.cz/el/ped/jaro2021/MA0007/um/prednaska/zaklady.pdf

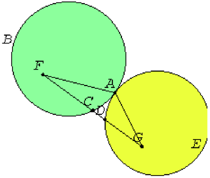
= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.







Věta

Přímka se dotýká kružnice v bodě C $\iff$ *je kolmá k průměru FC.*
Kružnice se dotýkají v bodě A $\iff$ *spojnice jejich středů prochází bodem A.*[44]

[44] Důkazy zpravidla nepřímo, viz např. https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII11.html

Dotyk vs. orientovaný dotyk

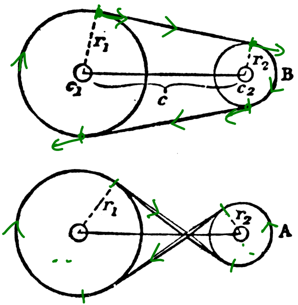
Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

- *cyklus* = orientovaná kružnice,
- *paprsek* = orientovaná přímka,
- *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.

2

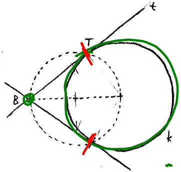
+

2

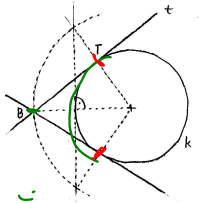


Základní úlohy s tečnami

Tečna z bodu ke kružnici:

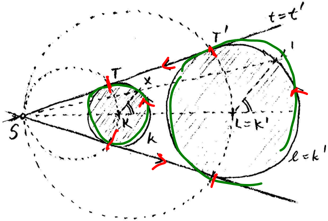


(a) pomocí Thaletovy kružnice

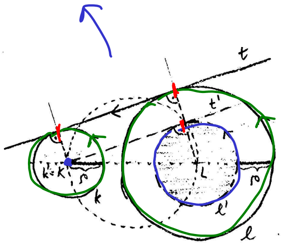


(b) pomocí **souměrnosti**

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



(a) pomocí **stejnolehlosti**

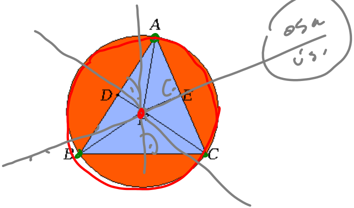


1) TAM
2) REDUKCE
3) ZPĚT

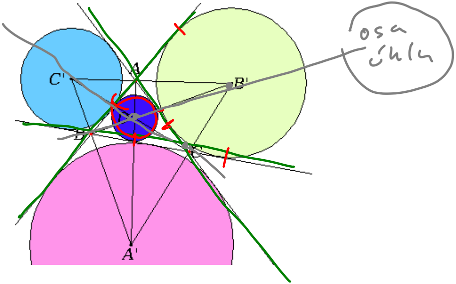
(b) pomocí **dilatace**[45]

[45] ...redukováno na předchozí případ.

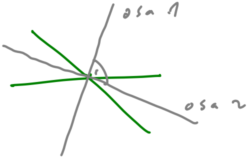
Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:



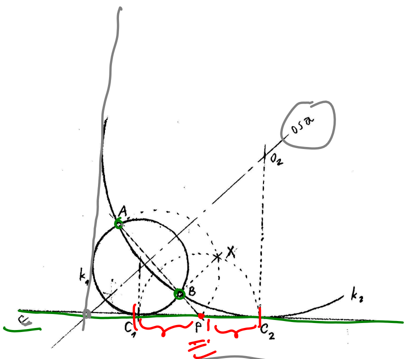
pomocí <u>os úseček</u>,

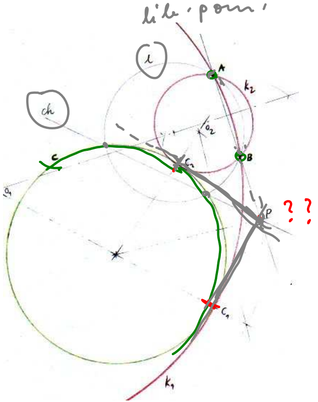


<u>os úhlů</u>



Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:

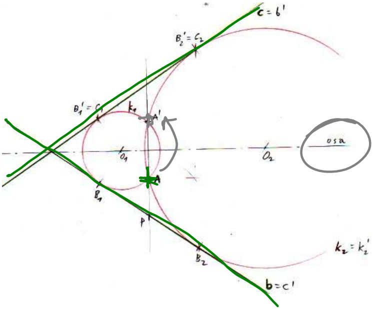




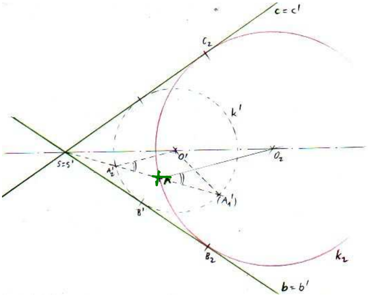
$\boxed{PA \cdot PB = PC^2}$ např. pomocí mocnosti

Základní úlohy s kružnicemi

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



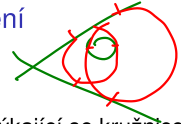
(a) pomocí **souměrnosti**[46]

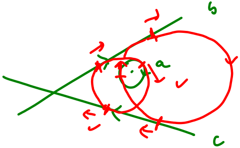


(b) pomocí **stejnolehlosti**

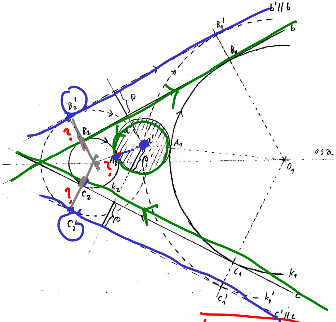
[46] . . . redukováno na předchozí případ (s. 88).

Mírné zobecnění

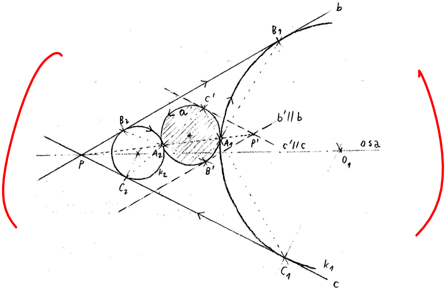




Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímek:



(a) pomocí **dilatace**[47]



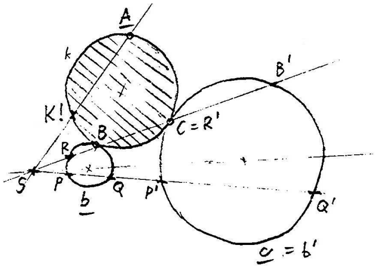
(b) pomocí **stejnolehlosti** ✓

2+2 { 1) ← práce
2) ← jednodušší !
3) ← snadné

---

[47]. . . redukováno na předchozí případ (s. 89).

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou kružnic:



Pomocí **stejnolehlosti** a mocnosti lze ukázat, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Tím je bod K jednoznačně určen, umíme jej sestrojit, ...[48]

[48]... a tím redukováno na předchozí případ (s. 88).

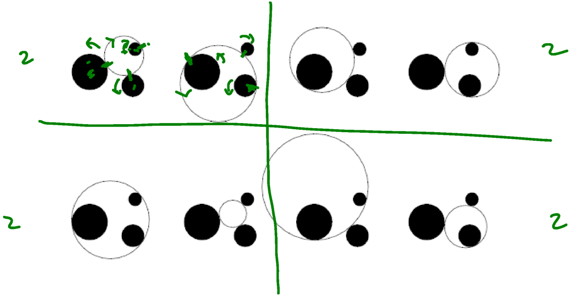
Obecná Apollóniova úloha

= dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

$$\lim_{r\to 0}(\text{kružnice}) = \text{bod}, \qquad \lim_{r\to\infty}(\text{kružnice}) = \text{přímka}.$$

Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po dvojicích:

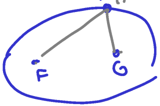


Poznámky

→ Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací. . .[49]

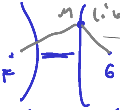
Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace*. . .

M lič.

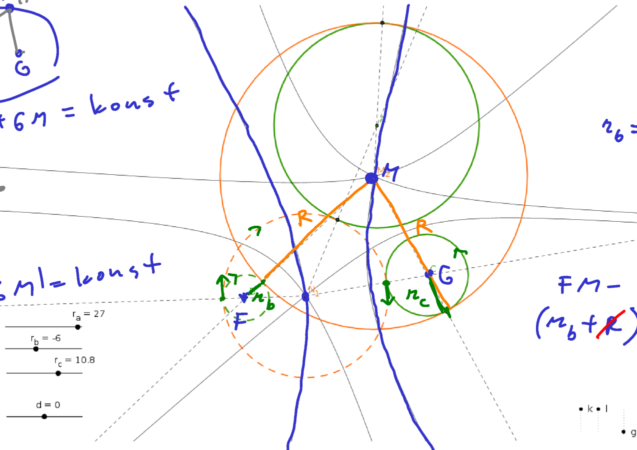


$FM + GM = \text{konst}$

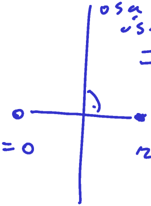
M lič



$|FM - GM| = \text{konst}$



osa úsečky



$r_b = 0$

$r_c = 0$

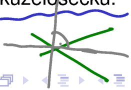
$FM - GM =$

$(r_b + \cancel{R}) - (\cancel{R} - r_c) =$

$= r_b + r_c$

$= \text{konst}$

věta: Středy všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku.



[49] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

Náš přístup

Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

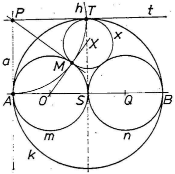
- souměrnosti,
- stejnolehlost,
- dilatace,
- kruhová inverze,
- apod.

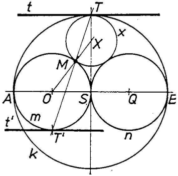
Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. 99...

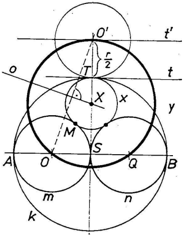
Ukázka typického použití na s. 111...

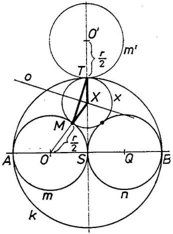
Poznámka

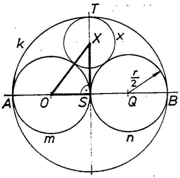
Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:[50]









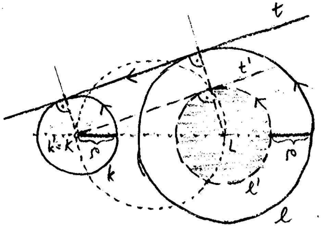


atd.

[50] např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

Dilatace jakožto příklad problémového zobrazení

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 86):



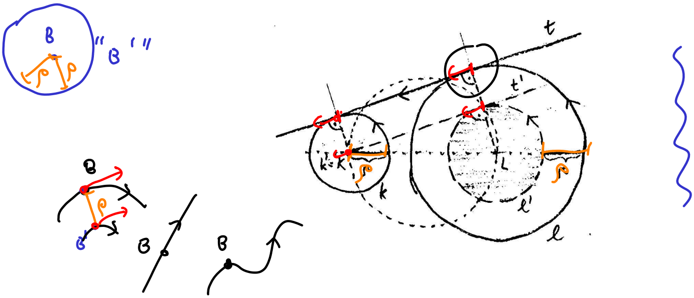
Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

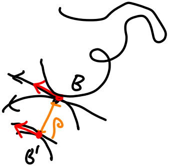
- nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (bez kontextu),[51]
- měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale **orientovaný dotyk**,
- orientovaný dotyk (dvou křivek) nejsnáze znázorníme (tečným) vektorem…

[51] Na rozdíl od všech ostatních zobrazeních v tomto kurzu!

Dilatace jakožto příklad problémového zobrazení

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 86):





Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (bez kontextu),[51]
- měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale **orientovaný dotyk**,
- orientovaný dotyk (dvou křivek) nejsnáze znázorníme (tečným) vektorem. . .

[51] Na rozdíl od všech ostatních zobrazeních v tomto kurzu!

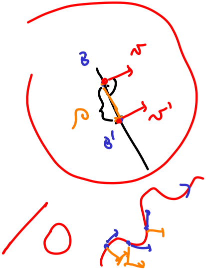
Dilatace jakožto příklad "**kontaktního** zobrazení"

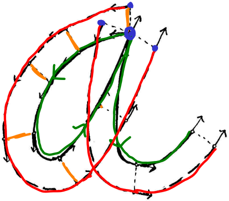
Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

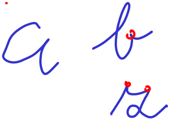
ρ ±

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ.

Jak je určena? Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem $\boldsymbol{v}$ je reprezentován vektorem $\boldsymbol{v}'$, který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k $\boldsymbol{v}$, a to na správnou stranu v závislosti na orientaci. . .







Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

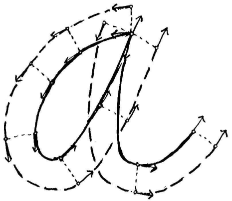
K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 86, 91, 112, . . .)!

Dilatace jakožto příklad **kontaktního** zobrazení

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ.

Jak je určena? Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem $\boldsymbol{v}$ je reprezentován vektorem $\boldsymbol{v}'$, který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k $\boldsymbol{v}$, a to na správnou stranu v závislosti na orientaci...



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 86, 91, 112, ...)!

Kruhová inverze

střed

Co to je? Transformace roviny vyjma jednoho bodu, ozn. O.[52]

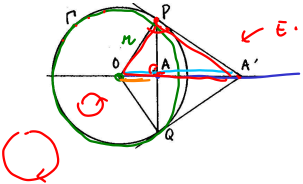
Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r.[53]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA, a to tak, že

$$\boxed{|OA| \cdot |OA'| = r^2} \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$

„inverze"

E. v. o odvěsně



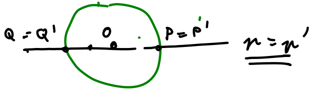
Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí samodružných bodů, základní konformní transformace v rovině, nepřímá, …

[52] tzv. *střed kruhové inverze*

[53] tzv. *řídící kružnice*

Vlastnosti

Zřejmé:



(a) *Kruhová inverze je involutivní transformace.*

(b) *Všechny body na řídící kružnici jsou samodružné.*

(c) *Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*

(d) *Každá přímka procházející středem inverze je samodružná; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a*

$$\lim_{X\to\infty} X' = O, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{X\to O} X' = \infty.$$

všude !!

Nezřejmé:

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.

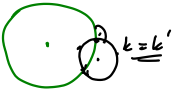
(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*

Vlastnosti

Zřejmé:

(f)



(a) *Kruhová inverze je involutivní transformace.*

(b) *Všechny body na řídící kružnici jsou samodružné.*

(c) *Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*

(d) *Každá přímka procházející středem inverze je samodružná; přitom jediné samodružné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a*

$$\lim_{X\to\infty} X' = O, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{X\to O} X' = \infty.$$

Nezřejmé:

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*

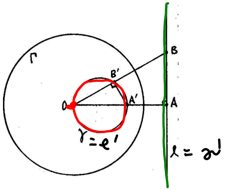
(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.

$\Downarrow$

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*



Důkaz.
Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ.
Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O.
Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ:

- Thaletova věta $\implies$ úhel $OB'A'$ je $\implies$ trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou $\implies$

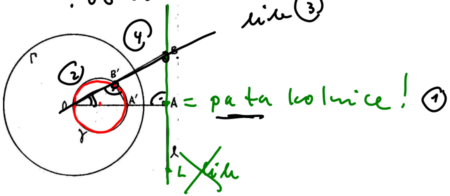
  neboli $OB' \cdot OB = OA' \cdot OA$.

- Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ, takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2. \qquad \square$$

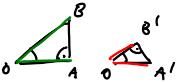
(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*

? $OB \cdot OB' = r^2$



Důkaz.

Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ.
Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O.
Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ:



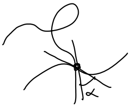
- Thaletova věta $\implies$ úhel $OB'A'$ je pravý $\implies$ trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou PODOBNÉ $\implies$ . . . . . .

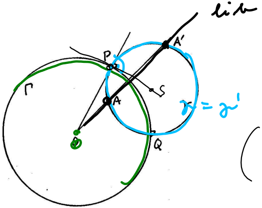
  $OB' : OA' = OA : OB$ neboli $\boxed{OB' \cdot OB \overset{!}{=} OA' \cdot OA.}$ ✓

- Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ, takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2. \qquad \square$$

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.





$\Gamma \perp \gamma \iff OA \cdot OA' = r^2$

(průměr OP = tečna γ
průměr SP = tečna Γ)

Důkaz.
Kružnice γ protíná řídící kružnici Γ kolmo[54]

$\iff$ poloměr OP je ke kružnici γ

$\iff$ pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí[55]

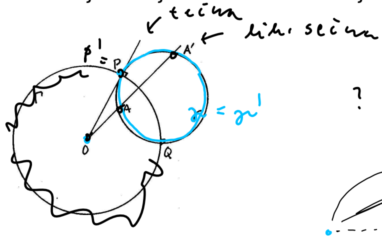
$$OA \cdot OA' =$$

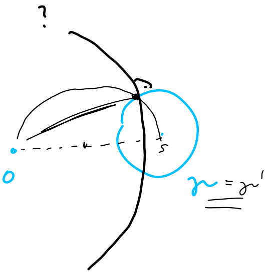
$\iff$ body A a A' jsou vzhledem ke Γ. □

[54] tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé
[55] podle věty o bodu ke kružnici (s. 37)

Vlastnosti

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.





Důkaz.

Kružnice γ protíná řídící kružnici Γ kolmo[54]

$\iff$ poloměr OP je tečnou ke kružnici γ

$\iff$ pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí[55]

$$OA \cdot OA' \overset{!}{=} OP \cdot OP = r^2$$

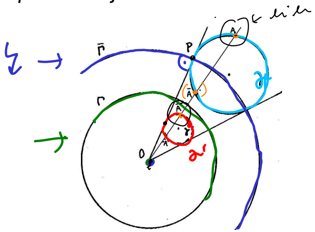
$\iff$ body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ. □

[54] tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé

[55] podle věty o mocnost bodu ke kružnici (s. 37)

Vlastnosti

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*



$\Gamma \circ \bar{\Gamma}$ = STEJNOLEHLOST!

tj. Γ = STEJN… $\circ\ \bar{\Gamma}$

Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je __________:[56]

- Ozn. $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

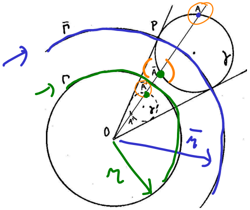
$$OA \cdot O\bar{A} = \qquad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = \quad .$$

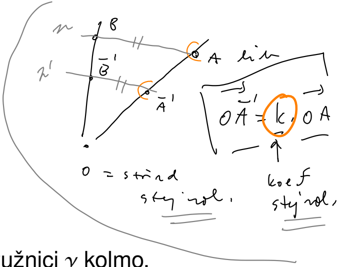
- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = \qquad = \textbf{konst.}, \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \textbf{konst} \cdot OA. \qquad \square$$

[56] …zbytek je jasný: z předchozího (s. 105) a vlastností stejnolehlosti (s. ??) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*





Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar\Gamma$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar\Gamma$ a Γ je STEJNOL.:[56]

- Ozn. $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar A$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar\Gamma$, tedy

$$OA \cdot \cancel{O\bar A} = \bar r^2 \quad \text{a} \quad \cancel{O\bar A} \cdot O\bar A' = r^2.$$

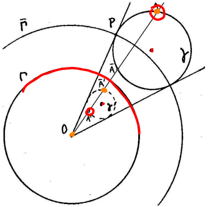
- Odtud po úpravě

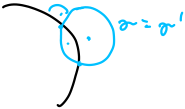
$$O\bar A' : OA = r^2 : \bar r^2 = \textbf{konst.}, \quad \text{neboli} \quad O\bar A' = \textbf{konst} \cdot OA. \qquad \square$$

[56] ...zbytek je jasný: z předchozího (s. 105) a vlastností stejnolehlosti (s. **??**) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

Pozor

Při stejnolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ ZOBRAZUJE na střed γ'. ✓

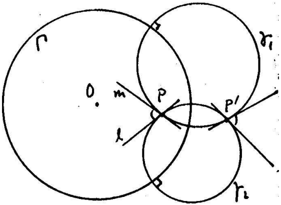




Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ NEZOBRAZUJE na střed γ'!

(Viz též obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma}$...)

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*[57]



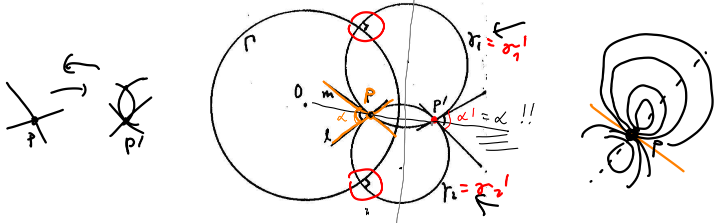
Důkaz.

- Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě $P =$ odchylka jejich tečen m a ℓ.
- Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.
- Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2, které jsou _____ k řídící kružnici Γ!
- Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují samy do sebe (s. 105), obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic a odchylka v bodě P je stejná jako odchylka v bodě P'. □

[57]… *úhlojevné*, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Vlastnosti

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*[57]



Důkaz.

- Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě P = odchylka jejich tečen m a ℓ.
- Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.
- Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2, které jsou KOLMÉ k řídící kružnici Γ!
- Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují samy do sebe (s. 105), obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic a odchylka v bodě P je stejná jako odchylka v bodě P'. □

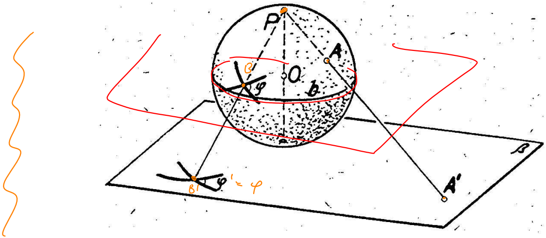
[57] … *úhlojevné*, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Poznámky

SHODNÉ

Každé podobné zobrazení je konformní.

Dalším známým **ne**podobným konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):



Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

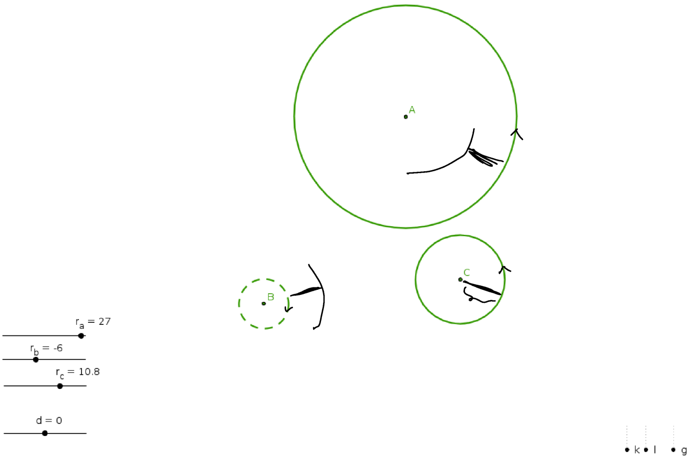
Konformní zobrazení

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

- **ne**zachovávávají vzdálenosti ani poměry vzdáleností,
- **ne**zobrazují přímky na přímky,
- **ne**zachovávávají obsahy, resp. objemy,

- ale zachovávávají odchylky protínajících se křivek,
- jsou prostá (injektivní). !

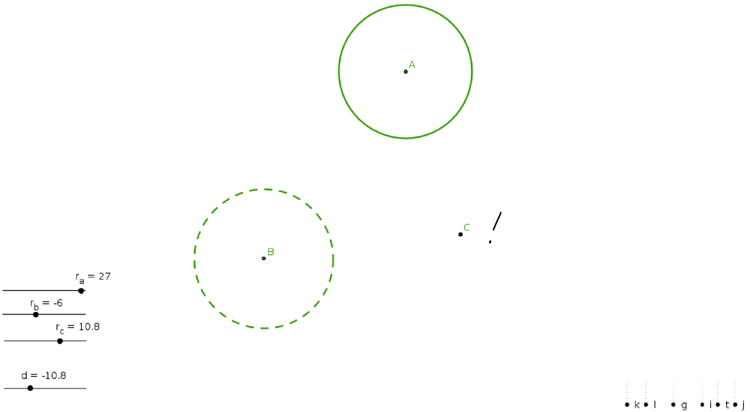
Orientovaná Apollóniova úloha:[58]



Sestrojit cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

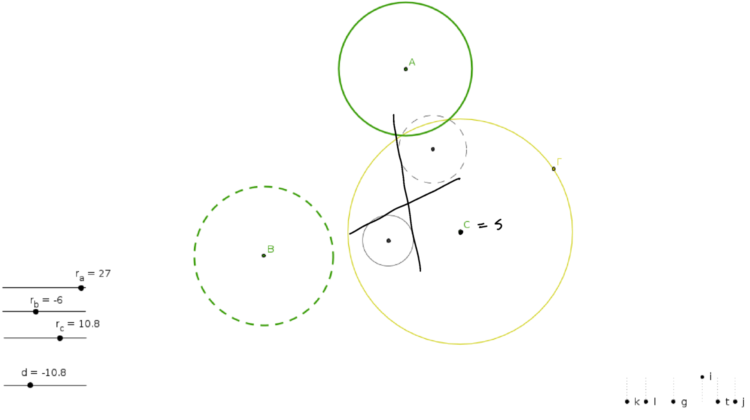
[58] http://ggbtu.be/mrFsNSnbN

(1) vhodná **dilatace**:



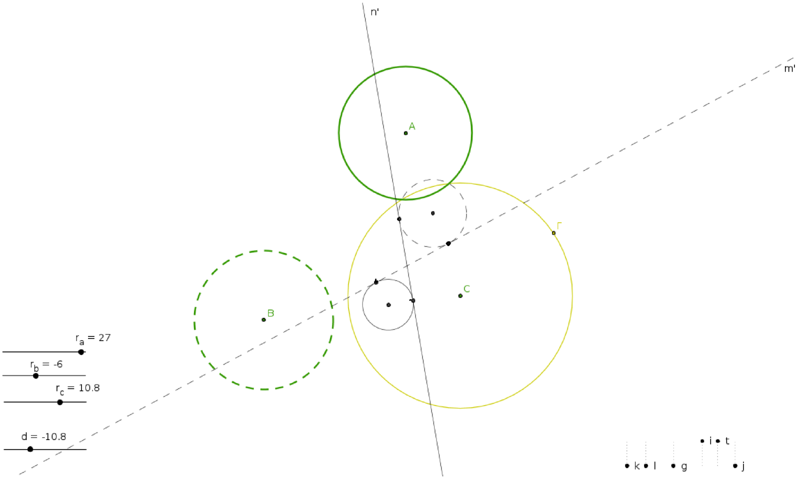
. . . tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, . . .

(2) vhodná **kruhová inverze**:



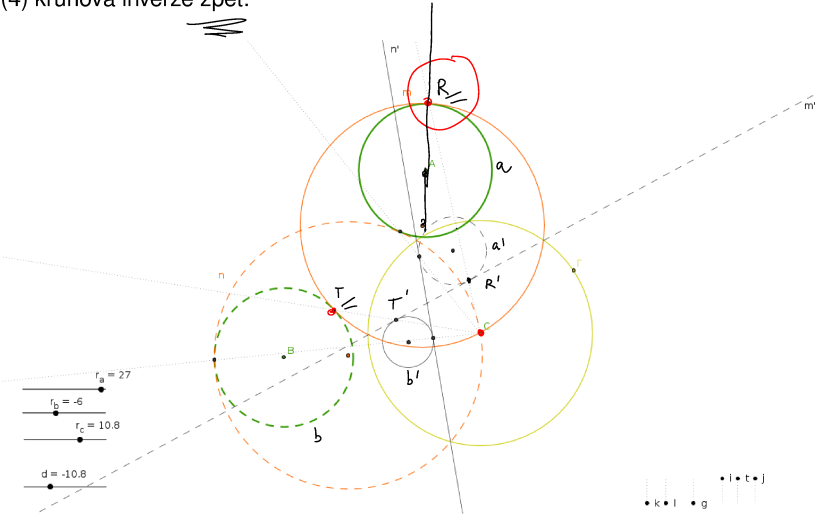
…kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 104), …

(3) <u>společné tečny</u> dvou kružnic:



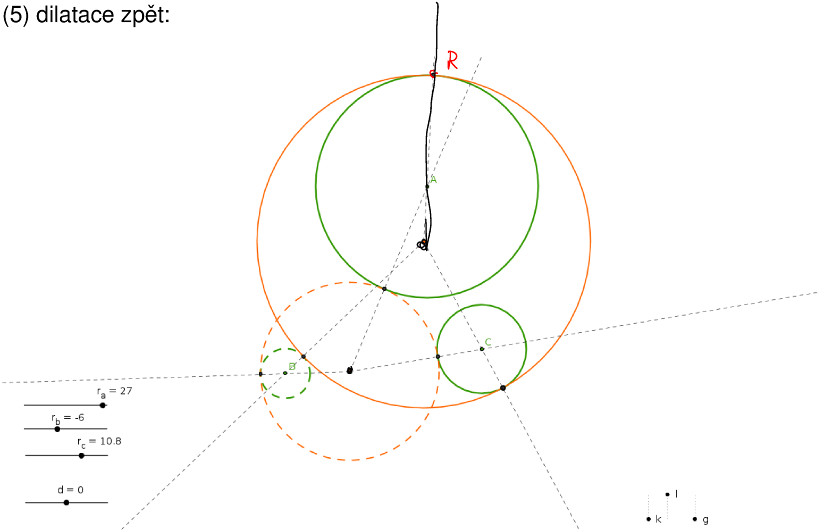
…což je jedna ze základních úloh (s. 86), …

(4) kruhová inverze zpět:



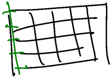
...což je snadné, ...

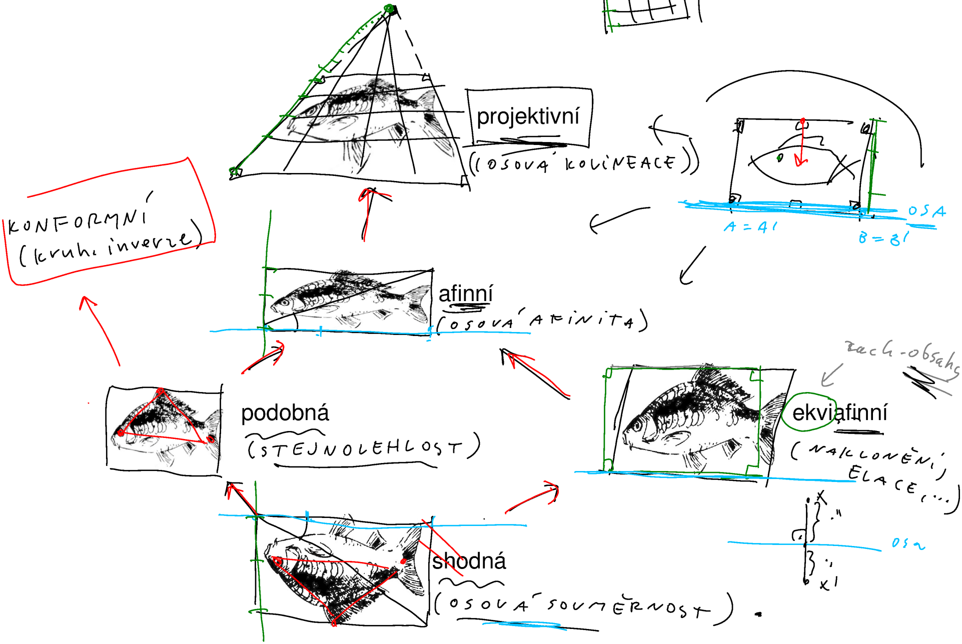
(5) dilatace zpět:



. . . což je taky snadné.

Hlavní větev geometrických zobrazení





Osová souměrnost

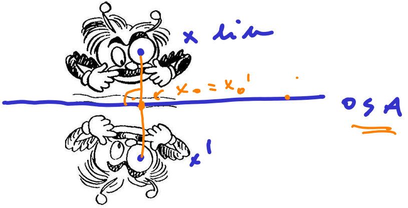
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o.[59]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$\boxed{\overrightarrow{X'X_o} = -\overrightarrow{XX_o},}$$

kde $X_o =$ průsečík XX' s osou o.



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou pevných bodů, základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

[59]tzv. *osa*

Obecná shodná zobrazení

Definice

Shodné zobrazení

(a) zachovává vzdálenosti,

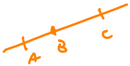
tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

$|AB| + |BC| = |AC|$

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,



(c) zachovává odchylky přímek, sss

(d) zachovává obsahy, resp. objemy,

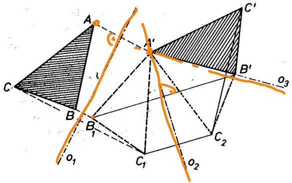
(e) je prosté (injektivní).

Shodnosti v rovině

Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:



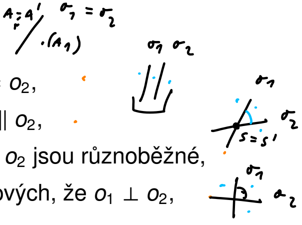
Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- $A \mapsto A'$ ... dořešíme obrazy $B \mapsto B_1$ a $C \mapsto C_1$,
- $B_1 \mapsto B'$ ... dořešíme obraz $C_1 \mapsto C_2$, atd. □

...proto je osová souměrnost základní shodností v rovině.

Odtud klasifikace shodností v rovině:



(a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 = o_2$,

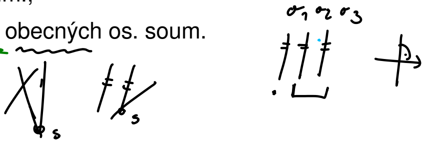
(b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \parallel o_2$,

(c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,

(d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \perp o_2$,

(e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,

(f) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných os. soum.

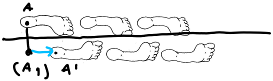


Poznámky

Shodnost s přímkou pevných bodů je právě osová souměrnost (e).

Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci), shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

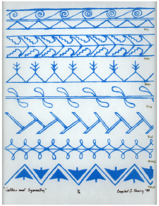
Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:



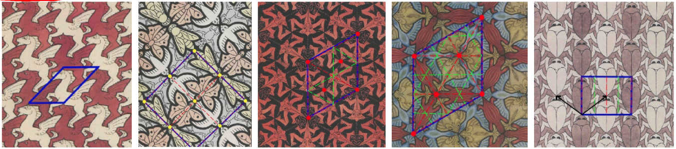
Symetrické vzory

Odtud klasifikace symetrických vzorů, viz např.

- sedm frízových vzorů[60]



- sedmnáct tapetových vzorů[61]



. . .

- atp.

[60] http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group
[61] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

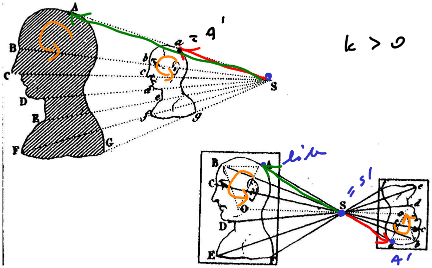
Stejnolehlost aneb škálování

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k.[62]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží přímce SX, a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



$k > 0$

$k < 0$

Jaké má vlastnosti? Transformace se pevným bodem,
základní podobnost, v rovině přímá transformace, . . .

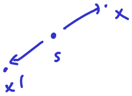
← dim 2

[62] tzv. *střed* a *koeficient* = poměr škálování

Speciální a mezní případy

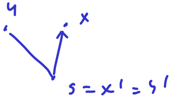
Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- *identita*, pokud $k = 1$,
- *středová souměrnost*, pokud $k = -1$.



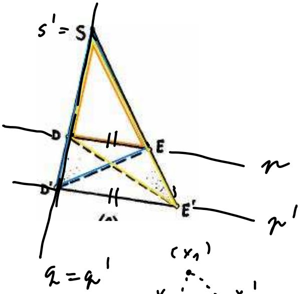
Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- *zobrazení do jednoho bodu*.



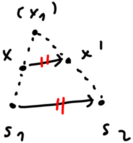
Základní vlastnosti a skládání stejnolehlostí

Základní poznatek známe ze s. 56!



Zejména, každá stejnolehlost je

- podobné zobrazení, které
- každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.



Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

Složení dvou stejnolehlostí se středy S_1, resp. S_2 a koeficienty k_1, resp. k_2 je:

- *identita, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,*
- *posunutí, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,*[63]
- *obecná stejnolehlost, právě když $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.*[64]

$S_1 \neq S_2$

$S \in S_1S_2$

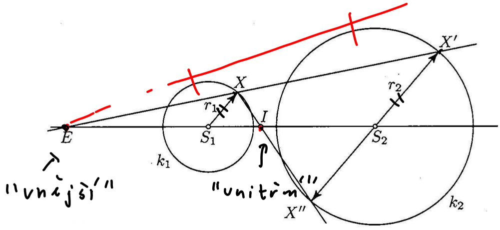
$S_1 = S_2 = S$

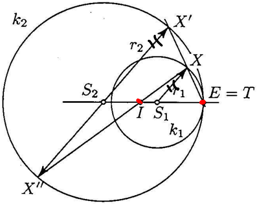
---

[63] …, přičemž vektor posunutí je násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1S_2}$

[64] …pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnolehlosti leží na přímce S_1S_2

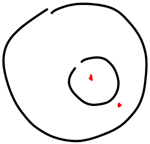
Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, . . .





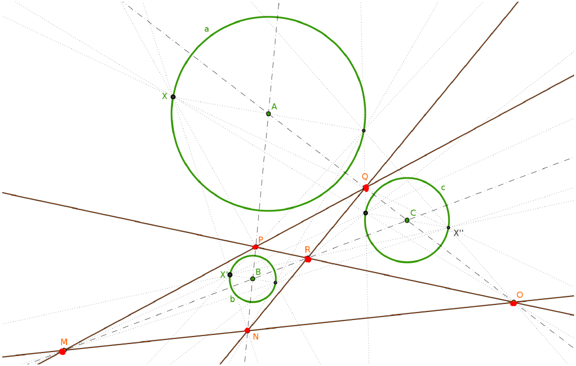
. . . každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, . . .

. . . a to dvojím způsobem.



Mongeova věta

Odtud Mongeova věta:[65]



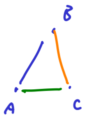
Věta

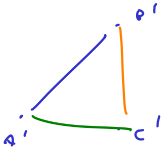
Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou čtyři kolineární trojice.

[Důkaz ... viz větu o skládání stejnol.]

[65] ... uplatnění např. při řešení obecné Apollóniovy úlohy

Obecná podobná zobrazení





Definice

Podobné zobrazení

(a) zachová poměry vzdáleností,

tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = k\,|AB|,$$

k = 1
shodné

kde k = kladná konstanta, tzv. *koeficient podobnosti*.

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineární bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

(d) obsahy se mění k^2-krát, resp. objemy se mění k^3-krát,

(e) je prosté (injektivní).

Poznámky

Podobnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. $\boxed{\text{tří}}$ bodů v obecné poloze).

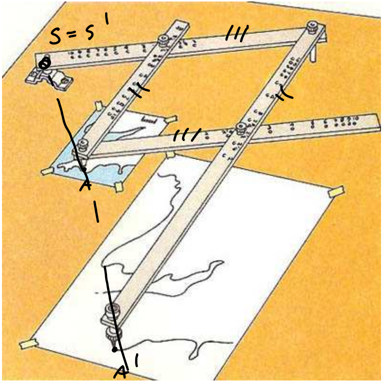
Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).

Každé podobné zobrazení je složením ~~nějaké shodnosti~~ osových souměrností a stejnolehlosti.

... proto je stejnolehlost základní podobností.

v lib. dim

Užitek



Pantograf[66]

66 http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph

Osová afinita aneb škálování v jednom směru

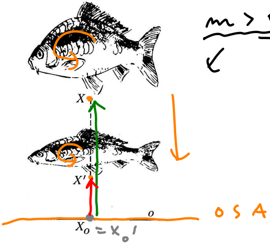
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

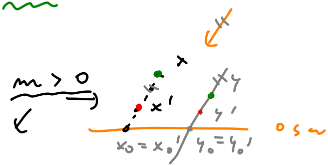
Čím je určena? Přímkou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a nenulovým reálným číslem m.[67]

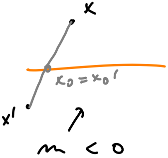
Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem $\boldsymbol{s}$, a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_o} = m \cdot \overrightarrow{XX_o}$$

kde X_o = průsečík XX' s osou o.







Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů, základní afinní transformace v rovině, přímá/nepřímá podle znaménka m, ...

[67] tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

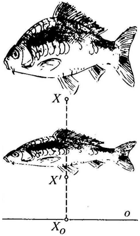
Osová afinita aneb škálování v jednom směru

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a nenulovým reálným číslem m.[67]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem $\boldsymbol{s}$, a to tak, že

kde X_o = průsečík XX' s osou o.



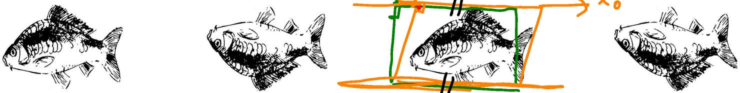
Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů, základní afinní transformace v rovině, přímá/nepřímá podle znaménka m, ...

[67] tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:[68]

- *osová souměrnost*, pokud $m = -1$ a směr $\perp$ ose
- *šikmá souměrnost*, pokud $m = -1$ a směr $\not\perp$ ose
- *elace* aneb *naklonění*, pokud směr $\parallel$ ose ($\Longrightarrow m = 1$),



zach. obsahy … "ekvi-afinní"

Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- rovnoběžné promítání do přímky *o* ve směru **s**.

$x_0 = x_0' = x' = z'$

[68] $m = -1 \iff$ involuce

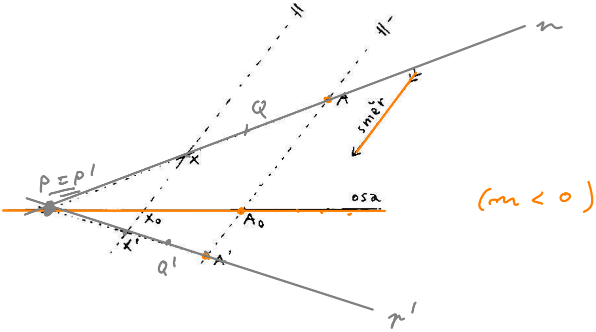
Základní vlastnosti

Obecná osová afinita zachovává:

(a) kolineárnost bodů,

(b) poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,[69]

(c) rovnoběžnost přímek.



Důkaz.

Variace na podobné trojúhelníky. . . □

[69] . . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Obecná afinní zobrazení

a / → /

b // → //

c

Definice

Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) z předchozí strany.

- Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita* (viz osová afinita).[70]
- Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmá souměrnost nebo elace).

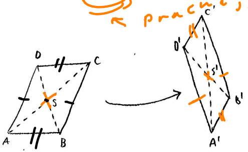
nakloněn í

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní. . .

✓ snadné

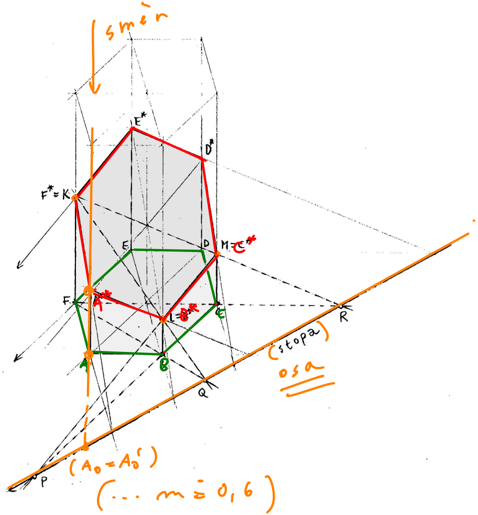
pracnější . . .



(a) ⇓ (b) + (c) zákl. věta af. geom. . .

Rovnoběžník ⟺ úhlopříčky se půl. ve středech . . .

[70] Příkladem neprostého afinního zobrazení je např. *rovnoběžné promítání*. . .



Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou *KLM*.[73]

[73] http://ggbtu.be/mkvJL3iqr

Afinity v rovině

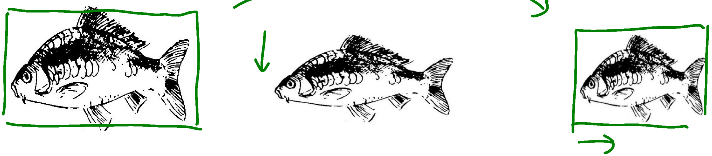
Analogicky k tvrzení na s. 121 máme:

Věta
Každá afinita v rovině je složením nejvýše tří os. afinit !

Důkaz.
Myšlenka důkazu je STEJNÁ, volnost v realizaci MNOHEM VĚTŠÍ. □

. . . proto je osová afinita základní afinitou v rovině.

Příklad
Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:



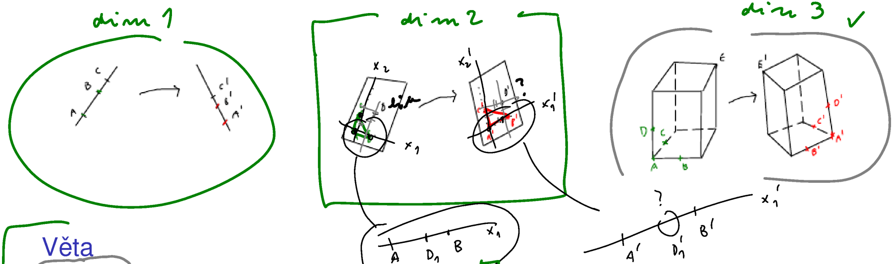
O určenosti afinního zobrazení

$n=1$

Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy 2 různých bodů. . .

$n=2$

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy 3 bodů v obecné poloze. . .



Věta

Prosté[70] afinní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy $\boxed{n+1}$ *bodů v obecné poloze.*

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí ROVNOBĚŽEK a přenášení POMĚRŮ (TROJIC BODŮ). □

[70] resp. „ne příliš degenerované“, viz dále. . .

[71] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Shrnutí a poznámky

Každé podobné zobrazení je AFINNÍ.

Každé shodné zobrazení je EKVIAFINNÍ.

Podobné a ekviafinní zobrazení je SHODNÉ.

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s ROVINOU PEVNÝCH BODŮ.

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je rovnoběžné promítání do ROVINY.

3 D → 2 D

Obecné afinní zobrazení:

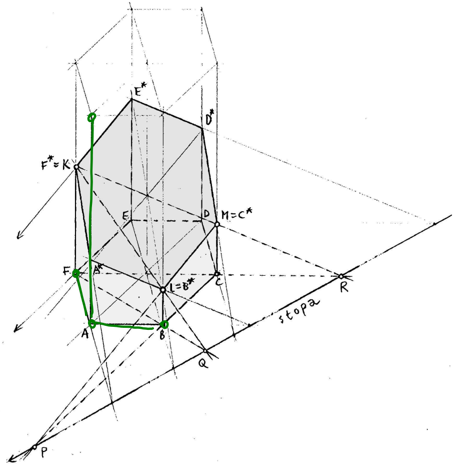
def

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- zachovává rovnoběžnost,
- NE zachovává obsahy, resp. objemy,
- NE zachovává odchylky,
- NEMUSÍ být prosté (injektivní).

Užitek

$n=3$

stačí 4 BODY!



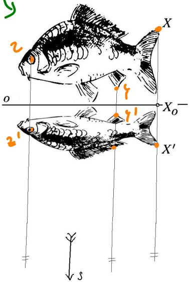
Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou *KLM*.[72]

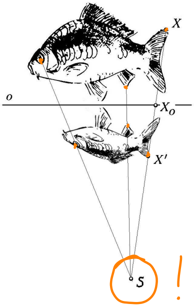
[72] http://ggbtu.be/mkvJL3iqr

Poslední zobecnění

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 117):

- Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné. . .
- . . . jako od osové afinity k osové kolineaci. . .

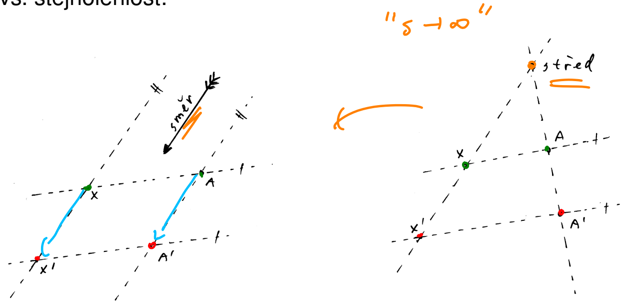




- . . . nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému. . .

Jak to funguje?

Posunutí vs. stejnolehlost:



- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr,
- $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \ldots$ vektor posunutí,

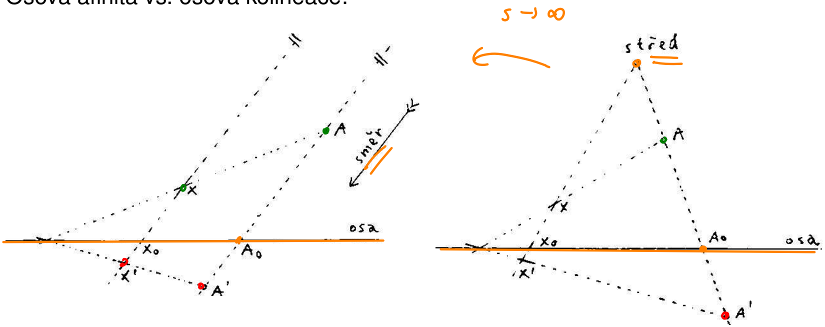
$X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,

$\dfrac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \dfrac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \ldots$ koef. stejnolehlosti,

„Posunutí $=$ stejnolehlost se středem v ∞ .“

Jak to asi funguje?

Osová afinita vs. osová kolineace:

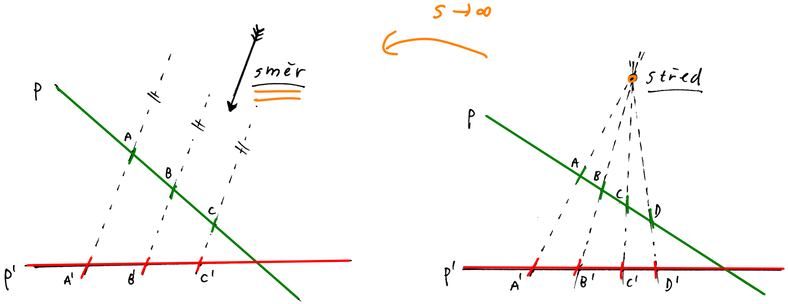


- $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr, $\quad$ $X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- $\dfrac{\overrightarrow{X'X_o}}{\overrightarrow{XX_o}} = \dfrac{\overrightarrow{A'A_o}}{\overrightarrow{AA_o}} = \dots$ modul, $\quad$???? = ???? = … modul,[73]

„Osová afinita = osová kolineace se středem v ∞ .“

[73] kde ???? je *nějak* určeno body A, A', A_o a S.

Rovnoběžné vs. středové promítání:

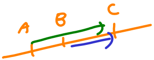


- $A'A \parallel B'B \parallel \ldots$ směr, $\qquad A'A \cap B'B \cap \ldots$ střed,
- $\dfrac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \ldots$ zákl. invariant, $\qquad ???? = ???? = \ldots$ zákl. invariant,[74]

„Rovnoběžné promítání $=$ středové promítání se středem v ∞ ."

[74]kde ???? je *nějak* určeno body A, B, C a D.

Dělicí poměr a dvojpoměr



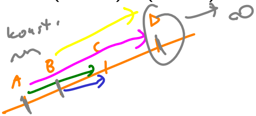
Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

CROSS-RATIO

$$" \quad d = (AB\,C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}. \quad " \in \mathbb{R}$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB\,C) : (AB\,D)$; značíme a zapisujeme takto:



$$" \quad (AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} \quad " \in \mathbb{R}$$

Poznámky

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim_{D\to\infty}(AB\,D) = 1$, platí $\lim_{D\to\infty}(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : 1 = (AB\,C)$

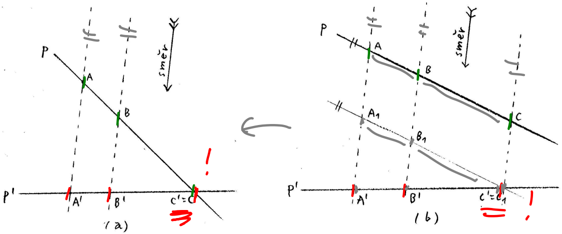
konst

$$" \frac{\infty}{\infty} " \qquad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BD}} + \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BD}} + 1 \to 0$$

středové dvojpoměry

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.[75]



Důkaz.

(a) Spec. případ plyne z podob. trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 56).

(b) Obecný případ plyne z (a) a shodnosti protilehlých stran v rovnoběžnících.

□

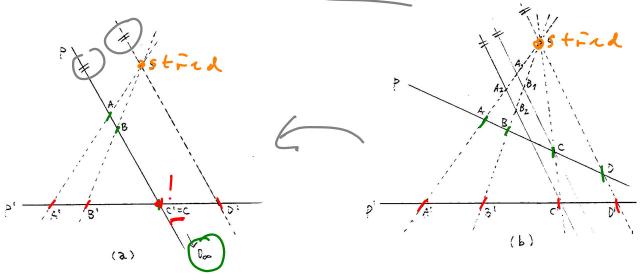
[75] …pokud se různé body zobrazí na různé body.

Nově

+400

Věta (Pappova)

Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[76]



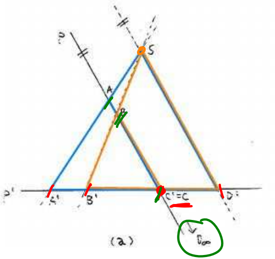
Důkaz.

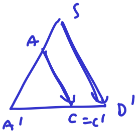
(a) Spec. případ ($C = C'$ a $SD' \parallel p$) plyne z PODOBNOSTI trojúhelníků (s. 56) a vztahu $(AB\,C) = (AB\,CD_\infty)$ (s. 148).

(b) Obecný případ plyne z (a) a PODOBNOSTI trojúhelníků. . . □

[76] . . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Detaily k důkazu Pappovy věty (a)





Z modré, resp. oranžové podobnosti plyne

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\cancel{\overrightarrow{SD'}}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} \quad \text{resp.} \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\cancel{\overrightarrow{SD'}}} = \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} \quad \checkmark$$

Po dělení

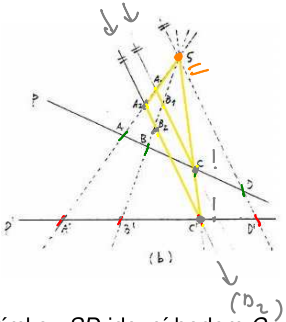
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \boxed{\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}}}$$

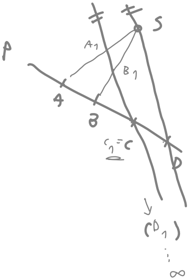
tudíž $(AB\,C) = \boxed{(A'B'\,C'D')}$.

Levá strana je však totéž, co $(AB\,CD_\infty)$, tedy

$$(AB\,CD_\infty) = (A'B'\,C'D'). \quad \checkmark$$

Detaily k důkazu Pappovy věty (b)





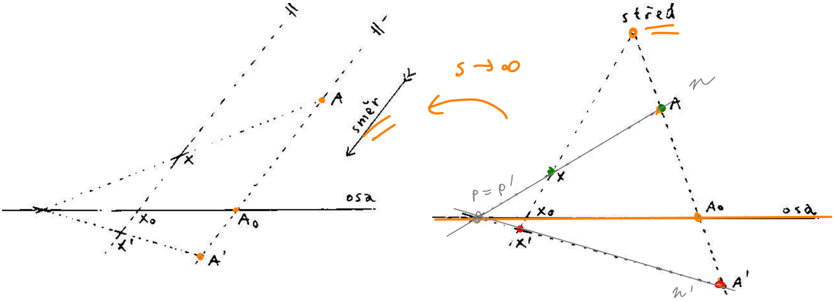
Doplníme rovnoběžky s přímkou SD jdoucí bodem C, resp. C'.

Z (a) plyne $(A_1B_1\,C) = (ABCD)$, resp. $(A_2B_2\,C') = (A'B'C'D')$.

Ze žluté podobnosti plyne $(A_1B_1C) = (A_2B_2C')$, a tedy

$$(AB\,CD) = (A'B'\,C'D').$$

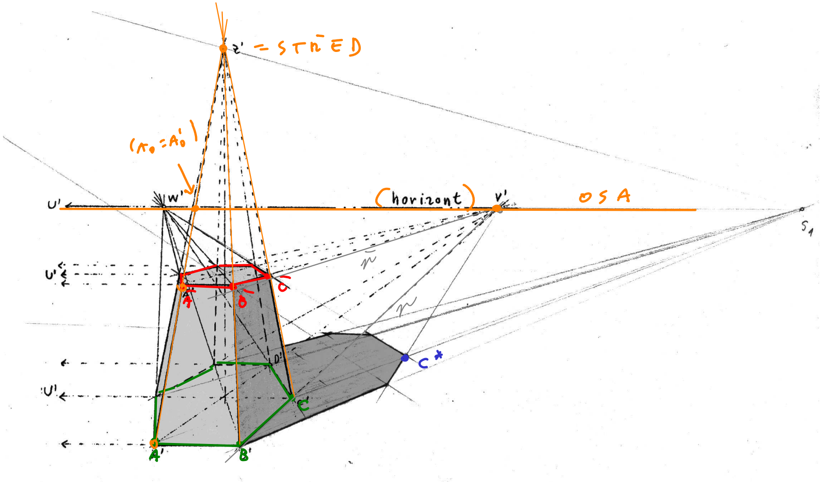
Osová afinita vs. osová kolineace:



- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr, $\qquad X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,
- $(X'X\,X_o) = (A'A\,A_o) = \ldots$ modul, $\qquad (X'X\,X_o\cancel{S}) = (A'A\,A_oS) = \ldots$ modul.

s → ∞

Všudypřítomná osová kolineace...

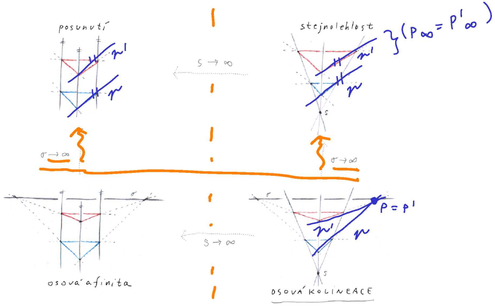


Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín.

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- *osová afinita*, pokud S je ∞ ,
- *stejnolehlost*, pokud o je ∞ ,
- *posunutí*, pokud S i o jsou ∞ .



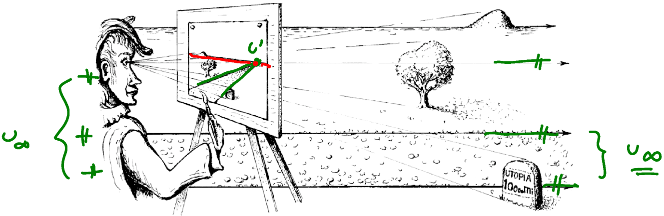
Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerované (neinjektivní) případy:

- *středové promítání* do přímky o z bodu S.
- *rovnoběžné promítání* do přímky o, pokud S je ∞ .

Pozor!

Obecná afinní zobrazení fungují v CELÉ rovině, resp. prostoru.

Při osové kolineaci či středovém promítání některé body NEMAJÍ obraz, jiné vzor; resp. jsou „ v ∞ “:



úběžnice

… to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

obraz ∞ bodu

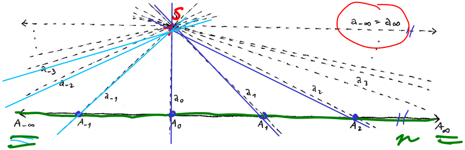
Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor **rozšíříme**:

Eukleidovský prostor rozšířený o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* prostor.

Původní body jmenujeme *vlastní*, ty nové pak *nevlastní*.

Projektivní rozšíření

Přesněji, body rozšířeného prostoru (A_i) ztotožňujeme s přímkami (a_i) procházejícími nějakým externím bodem (S):



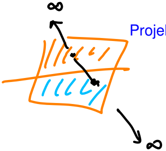
Vlastní body odpovídají různob. , nevlastní body rovnoběžným s původním (nerozšířeným) prostorem.

Tedy:

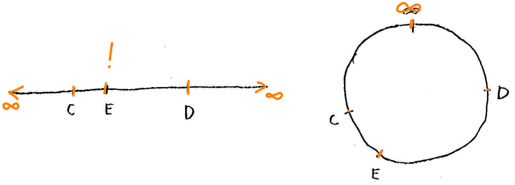
- Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má JEDEN nevlastní bod, !
- Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má PŘÍMKU nevlastních bodů. u_∞ n
- Každé dvě přímky v projektivní rovině se PROTÍNAJÍ....
- Atd.

různob. rovnob. u_∞

Uspořádání



1) ▶ Projektivní přímka je UZAVŘENÁ!.
3) ▶ Projektivní přímka NEROZDĚLUJE projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.[77]
2) ▶ Uspořádání bodů na projektivní přímce NEMÁ valného smyslu: !!



Eukleidovská vs. projektivní přímka

[77] Vzpomeňte na diskuzi kolem věty o vnějším úhlu v trojúhelníku (s. 8).

Osová kolineace pořádně (viz s. 153)

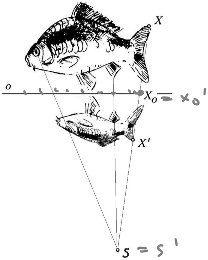
Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o, bodem S a nenulovým reálným číslem m.[78]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA, a to tak, že

$$(A'A\,A_oS) = m,$$

kde A_o = průsečík AA' s osou o a $(A'A\,A_oS)$ = dvojpoměr.



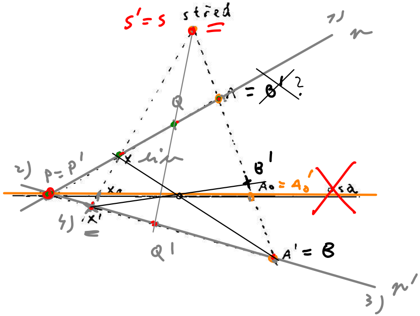
Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů,
základní projektivní transformace v rovině, ...

[78]tzv. *osa*, *střed* a *modul*

Osová kolineace zachovává:

✓ (a) kolineárnost bodů,

✓ (b) dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



Důkaz.
Plyne z definice a z Pappovy věty □

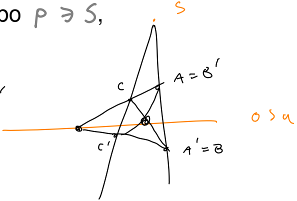
Další vlastnosti (viz s. 137)

Osová kolineace s osou o, středem S a modulem m:

(d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když $p = o$ nebo $p \ni S$,

(e) je involutivní, právě když $m = -1$.

„HARMONICKÝ POMĚR"



Poznámky

(f) NEMÁ smysl (globálně) řešit zda je přímé/nepřímé, ! zach. mění orientaci

(g) NEMÁ smysl (globálně) řešit změny obsahů. !

Obecná projektivní zobrazení (viz s. 138)

Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) z předchozí strany.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

(*) .. kdykoli dává smysl, u ∞

u ∞

Poznámky

Základní vlastnosti (a) a (b) nejsou zcela nezávislé.
Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) implikuje (b)... [79]

Pokud projektivní zobrazení zobrazuje všechny (ne)vlastní body na (ne)vlastní, potom je AFINNÍ !

[79]... viz základní větu projektivní geometrie a její důsledky (za rok)!

Analogicky k předchozím případům máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše 3 osových kolineace.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je STÁLE STEJNÁ, volnost v realizaci STÁLE VĚTŠÍ . . . □

. . . také proto je osová kolineace základní kolineací v rovině.

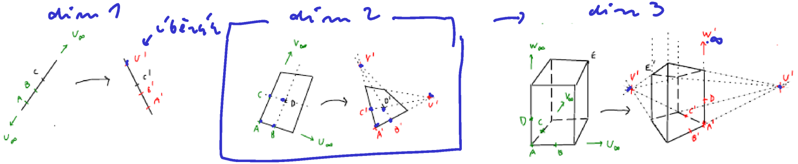
O určenosti projektivního zobrazení (doplňuje s. 140)

dim 1 Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), ← dvojpoměr

- tj. obrazy $\boxed{3}$ (n+2) různých bodů,
- tedy např. obrazy 2 různých vlastních bodů a 1 úběžníkem…

dim 2 Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- obrazy $\boxed{4}$ (n+2) bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- nebo obrazy 3 vlastních bodů v obecné poloze a 2 odpovídajími úběžníky…



Věta

Prosté[80] *projektivní zobrazení prostoru dimenze* $\boxed{n}$ *je jednoznačně určeno obrazy* $\boxed{n+1}$ *vlastních bodů v obecné poloze a* $\boxed{n}$ *odpovídajícími úběžníky.*

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí úběžníků a přenášení dvojpoměrů… □

[80] resp. „ne příliš degenerované“, viz dále…

Shrnutí a poznámky (viz s. 141)

Každé afinní zobrazení je projektivní

Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je afinní

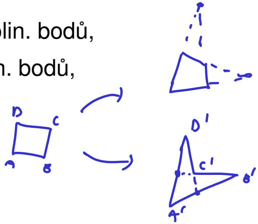
3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s rovinou pevných bodů

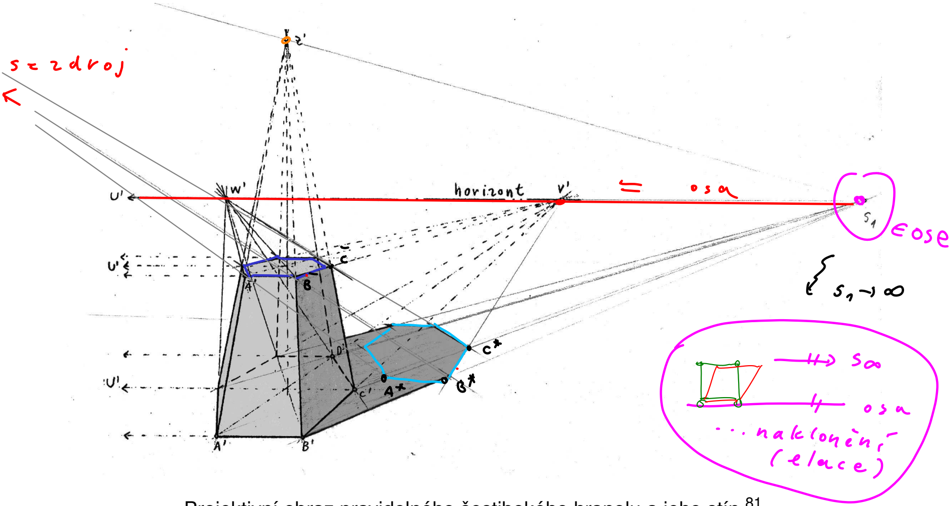
3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je středové promítání do roviny. . .

3D → 2D

Obecné projektivní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- NE zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- NE zachovává rovnoběžnost,
- NE zachovává obsahy, resp. objemy,
- NE zachovává odchylky,
- NEMUSÍ být prosté (injektivní).
- NEMUSÍ zach. KONVEXITU !!





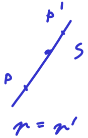
Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín.[81]

[81] Na obrázku můžeme vidět několik známých korespondencí: osová kolineace, osová kolineace, osová kolineace, ...

Osa vs. střed

Vše, co jsme kdy jmenovali <u>základní</u> transformací v rovině, mělo[82]

- *osu* = přímku pevných bodů,
- *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je pevná.



Osa nebo střed mohou být vlastní nebo nevlastní (s. 154).

Z <u>Desarguesovy věty</u> vyplývá, že

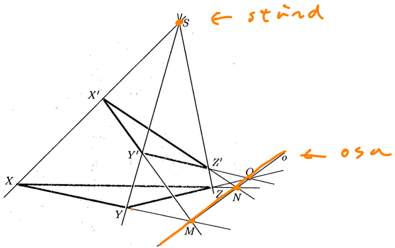
- *projektivní transformace v rovině má osu* $\Longleftrightarrow$ *má střed.* !!!

[důkaz ... ???]
časem

[82] https://ggbm.at/az7e9qsC

Věta

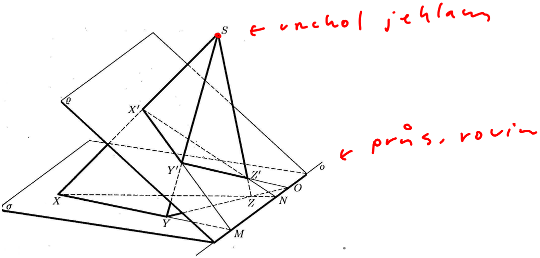
Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta. . .

Věta

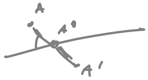
Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



... a její trojrozměrná interpretace.

Přehled základních transformací v rovině

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	(středové promítání do přímky)
		ano	1	id, "projektivní" elace
		ne	-1	"harmonická" soum.
		ne	jinak	**osová kolineace**
nevlastní	vlastní	ne	0	(rovnoběžné promítání do přímky)
		ano	1	id, naklonění (elace)
		ne	-1	šikmá (osová) soum.
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	identita
		ne	-1	střed. soum.
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí



Transformace je involutivní $\iff$ modul $= -1$.

Degenerované případy $\iff$ modul $= 0$.

Pro afinní transformace: přímá $\iff$ modul > 0 , nepřímá $\iff$ modul < 0.

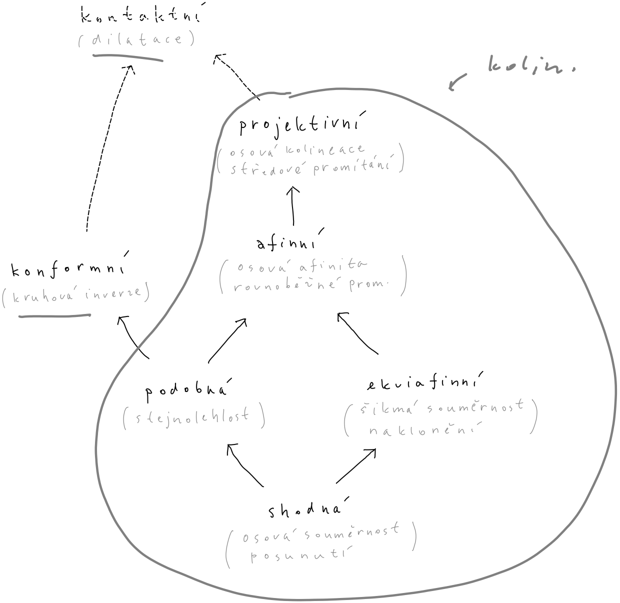
Přehled typů zobrazení a jejich vlastností

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	−	−	+	−	−	−
afinní	+	−	+	+	+	−	−
ekviafinní	+	−	+	+	+	+	−
podobná	+	−	+	+	+	−	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	−	−	−	−	−	−	+

- Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je AFINNÍ.
- Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je PODOBNÉ.
- Konformní zobrazení, které je projektivní, je PODOBNÉ.
- Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je SHODNÉ.

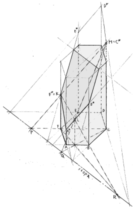
(OBSAHY)

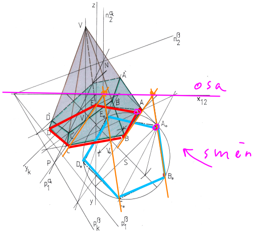
Hierarchie zobrazení (viz s. 105)

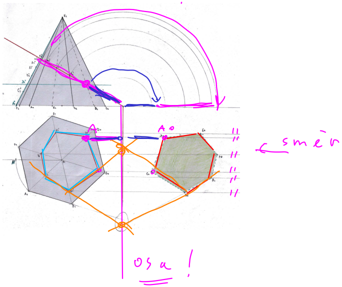


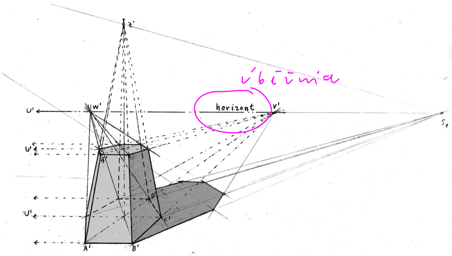
Užitek

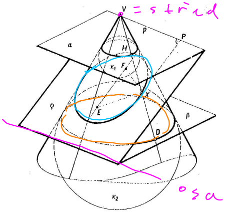
Mnoho základních zobrazení můžeme (resp. MUSÍME) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů:











Podle způsobu promítání dělíme na:

- středové, ← PROJEKTIVNÍ
- rovnoběžné, ← AFINNÍ
- exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- volné,[83]
- vázané,[84]
- vychytané,[85]
- analytické,[86]
- exotické.

[83] … takto jsme to dělali dosud,
[84] za chvíli,
[85] za chvíli,
[86] takto budeme dělat příští rok…

Umíme: středové a rovnoběžné promítání (viz s. 145 a 123)

Středové promítání (projekce) je modelové *projektivní* zobrazení:

(i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,

(ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[87]

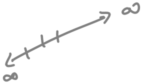
Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání je *afinní* zobrazení, navíc tedy

(iii) zachovává rovnoběžnost přímek,

(iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.[88]



[87]… kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé)

[88]… kdykoli to dává smysl…

Umíme: volné promítání (viz s. 147 a 125)

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

3D → 2D

Věta

„Nepříliš degenerované“

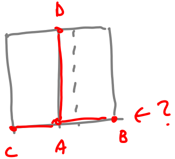
(a) *afinní,*

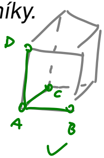
(b) *projektivní*

zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy

(a) m + 1 *bodů v obecné poloze,*

(b) m + 1 *bodů v obecné poloze a* m *odpovídajícími úběžníky.*





Základní konstrukce jsou:

(a) rovnoběžky a přenášení poměry

(b) úběžníky a přenášení dvojpoměry

Poznámka

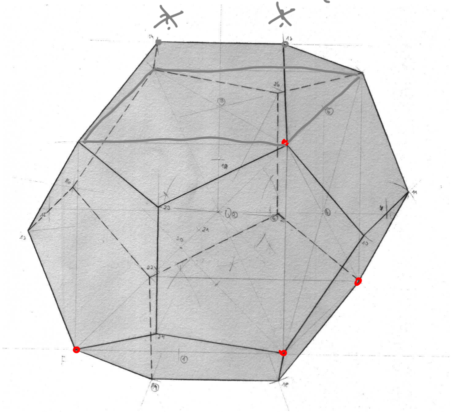
V předpokladu věty tušíme jistý zádrhel:
Jak sestrojit obraz bodu v „souřadné rovině“, která se zobrazuje do přímky?

Volný průmět pravidelného dvanáctistěnu

afinní

. . . pomocí vepsané krychle (podle s. 71):

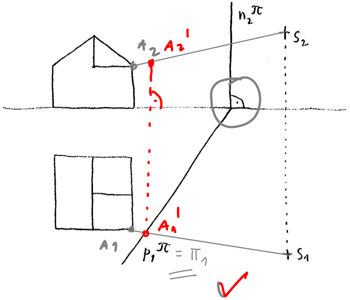
zlatý poměry

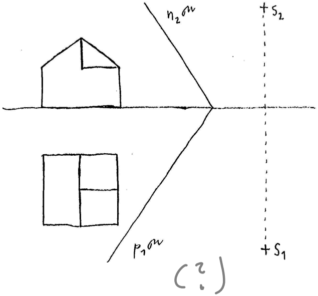


Nově: vázané promítání

Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými *sdruženými* průměty (nárys, půdorys):





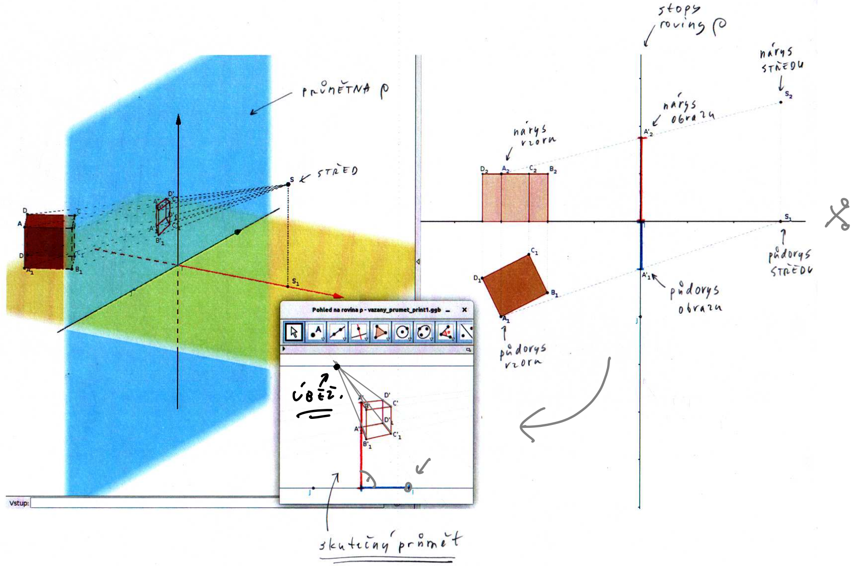
Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady!

→ Základní konstrukční dovednosti jsou:

- průnik přímky a roviny,
- odměřování a přenášení VZDÁLENOSTI !!

Vázaný průmět kvádru[89]

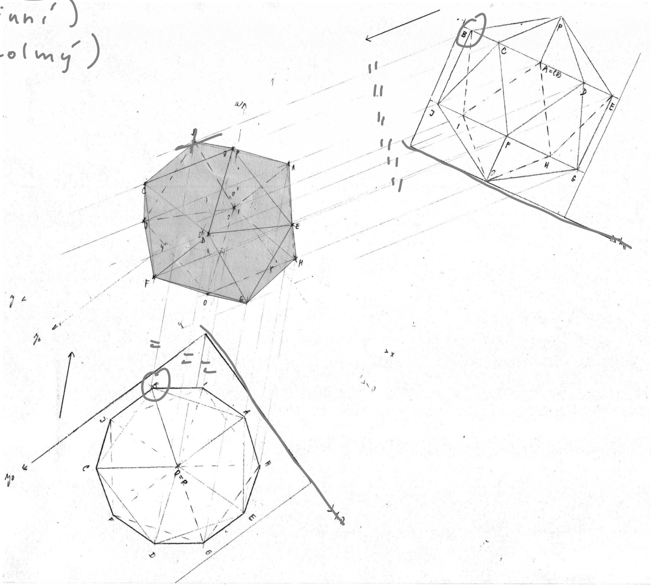
. . . do speciálně zvolené průmětny ρ:



[89] http://ggbtu.be/mZvlO63hi

Vychytaný průmět pravidelného dvacetistěnu

(afinní)
(kolmý)

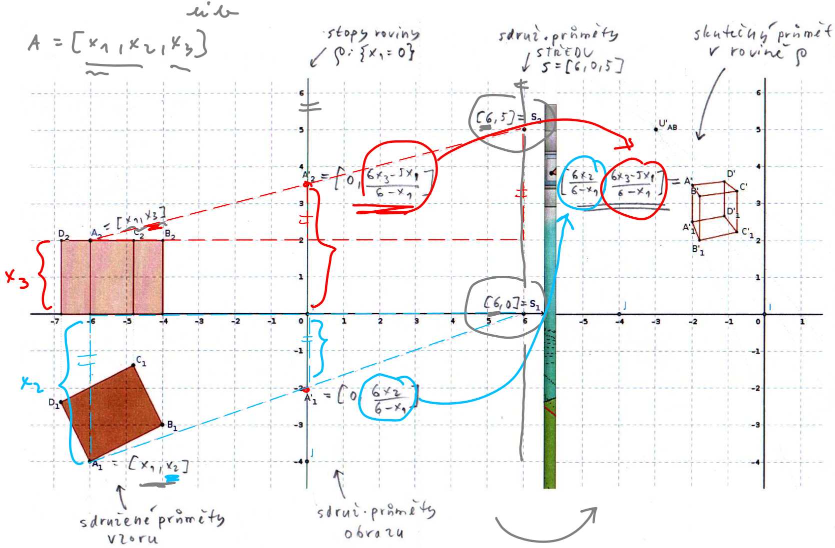


Cvičení: analytické vyjádření

$s = [6, 0, 5]$

$\rho = \{x_1 = 0\}$

... vzhledem k naznačené souřadné soustavě:



Výhled: analytické vyjádření

Středové promítání ze středu $S = [6,0,5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$

- v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6-x_1}\right],$$

$\leftarrow x_1 \neq 6$

- v *homogenních* (rozšířených) souřadnicích:

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (6x_0 - x_1 : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

? ? ? ?

$\boxed{\text{Všechno v jedné matici!}}$

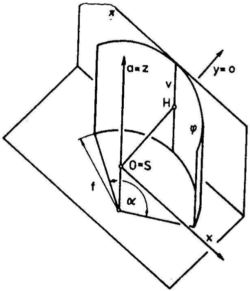
Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... viz základní větu projektivní geometrie (za rok)!

Další promítání

Dosud jsme uvažovali toliko __________ zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

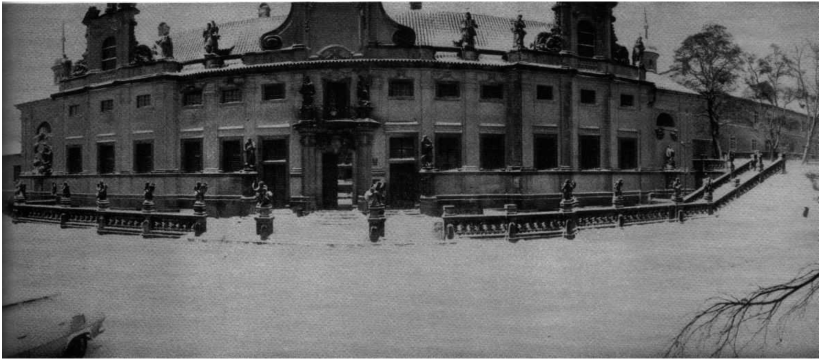
Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- středového promítání na válcovou plochu
- a rozvinutí této plochy do roviny.

Cylindrický průmět hradčanské Lorety



Některé přímky se zobrazují jako přímky, většina však ne. . .

Další provedení

Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

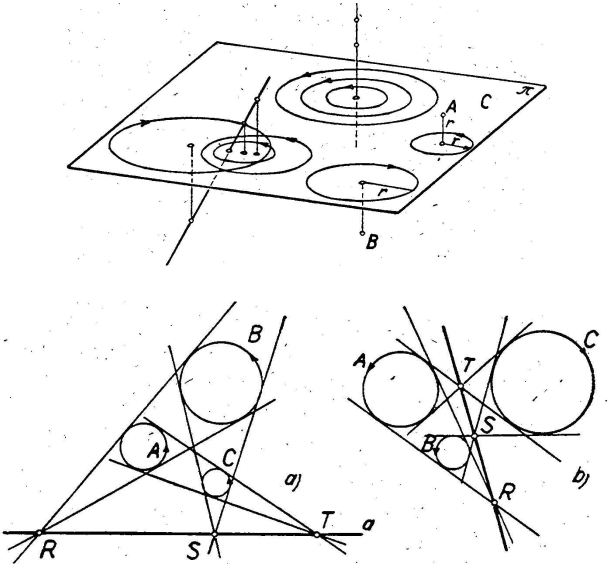
- souřadnicemi $A = [x_1, x_2, x_3]$,
- sdruženými průměty, tj. půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a nárysem $A_2 = [x_1, x_3]$,
- volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.[90]

Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a kótou (= souřadnicí x_3) $\rightsquigarrow$
- půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|x_3|$ a orientací podle znaménka x_3) $\rightsquigarrow$

[90] vrchol hranolu apod.

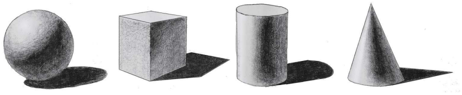
Cyklografický průmět bodu, přímky, roviny[91]

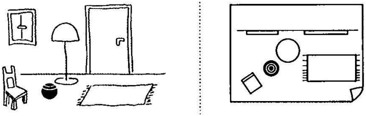


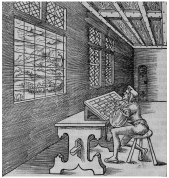
[91] Co nám tohle jenom připomíná a k čemu by to mohlo být dobré?

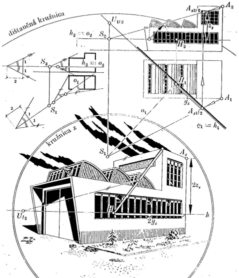
Užitek

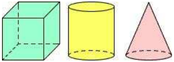
Se zobrazováním prostoru do roviny mohou — ale nemusí — být problémy:











Úvod (s. 2–5)

- primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- axiómy vyslovené, nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

Planimetrie (s. 6–60)

věta o stříd. úhlech

- základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Eukl. věty o odvěsně/výšce)

kvadr. rovnice

- geometrická algebra (zlatý řez apod.)
- o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, . . .)
- teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

Sestrojitelné veličiny (s. 22–27)

1

- úplná chakterizace ($+ \; - \; \cdot \; : \; \sqrt{\ }$)
- slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

Stereometrie (s. 61–72)

- rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- analogie, resp. rozdíly k 2D (rovnoběžnostěny, resp. jehlany)
- pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20) objemy

Dotykové úlohy (s. 75–85)

- základní úlohy (tečny) kruh. inverze
- základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnolehlost, dilatace)
- základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

Užitek (s. 16, 35, 46, 73, 86)

- kvadratura mnohoúhelníku
- kvadratické rovnice a jejich řešení
- pravidelný 5úhelník apod.
- specifické dotykové úlohy
- celkový přehled

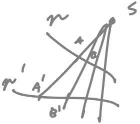
Zobrazení

Taxonomie

- hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní) (s. 105–148)
- další typy (konformní, kontaktní) (s. 90–104)
- příklady, obecné vlastnosti a hierarchie (s. 150–154)

Obecný rámec (s. 128–148)

- projektivní rozšíření
- Pappova věta !!!
- věta o určenosti



Základní příklady (s. 152, 158)

- regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

3D → 2D

Zobrazování prostoru do roviny (s. 157–169)

- podle promítání: středové ($\Longrightarrow$ projektivní), rovnoběžné ($\Longrightarrow$ afinní)
- podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina), ...
- základní úlohy (přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů)
- vychytávky (otočení roviny, zářezová metoda apod.)

Užitek (s. 99–104, 127, 155, 170)

- obecná Apollóniova úloha
- obecné průměty pravidelných a jiných těles
- řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti
- celkový přehled