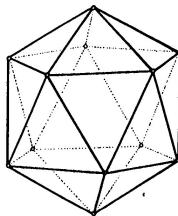
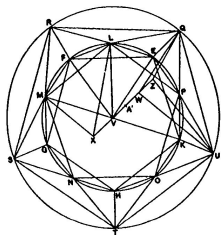


Konstrukční geometrie



Poslední aktualizace: 22. května 2021, Vojtěch Žádník

<http://is.muni.cz/el/1441/jaro2021/MA0007/>

Celkově

- ▶ jaro 2021: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- ▶ podzim 2021 a jaro 2021: počítačí geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Jaro 2021

- ▶ klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- ▶ geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- ▶ poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Organizační věci

Preference

- (1) celkový přehled
- (2) hlavní myšlenky a teoretické pozadí
- (3) konstrukce a technické záležitosti

Materiály

- ▶ IS: osnova, přednáška, GeoGebra, odkazy, staré písemky

Zakončení

- ▶ výkresy → zkoušková písemka → ústní zkouška

Soutěž

- ▶ o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

Základy	4
Úvod	5
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	22
Kosinová věta	31
O kružnicích	32
Pravidelný pětiúhelník a další	39
Teorie podobnosti	50
Trocha stereometrie	64
Pravidelné mnohostěny	69
Dotykové úlohy	77
Geometrická zobrazení	90
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

- = základy eukleidovské geometrie
- = geometrie Eukleidových Základů,¹ ovšem s Hilbertovými upřesněními.²

Základní pojmy:

- ▶ *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- ▶ *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- ▶ *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, ...*

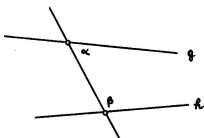
Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- ▶ *několik ke každému ze základních vztahů...*

¹kolem -300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady

²kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

- (I) Každé dva různé body spojuje přímka.
- (II) Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (III) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (IV) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (V) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.



$$\alpha + \beta < 2R \implies g \text{ a } h \text{ se protínají}$$

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce*. Postulát (V) je přezdíván *pátým Eukleidovým postulátem*.³

³https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

- ▶ *Veličiny témuž rovné i navzájem rovný jsou.*
- ▶ *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovný.*
- ▶ apod.

Dnes čteme jako:

- ▶ $k = l$ a $m = l \implies k = m$.
- ▶ $k = l$ a $m = n \implies k + m = l + n$.
- ▶ apod.⁴

⁴<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html>

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány. . .

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- ▶ *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

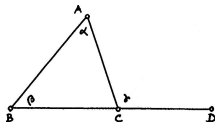
Axiomy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- ▶ *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

. . . jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky!⁵

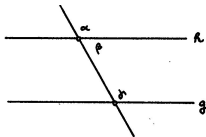
⁵viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 25).

- ▶ Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- ▶ Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.⁶



$$\gamma > \alpha \text{ a } \gamma > \beta$$

- ▶ Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek⁷ (odtud existence rovnoběžky).

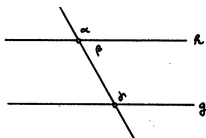


$$\alpha = \gamma \implies h \parallel g$$

⁶Zde jsou poprvé potřeba axiomy uspořádání (viz s. 11).

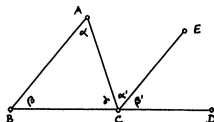
⁷Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 12).

- ▶ Věta o střídavých úhlech⁸ (odtud jednoznačnost rovnoběžky).



$$h \parallel g \implies \alpha = \gamma$$

- ▶ Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.⁹



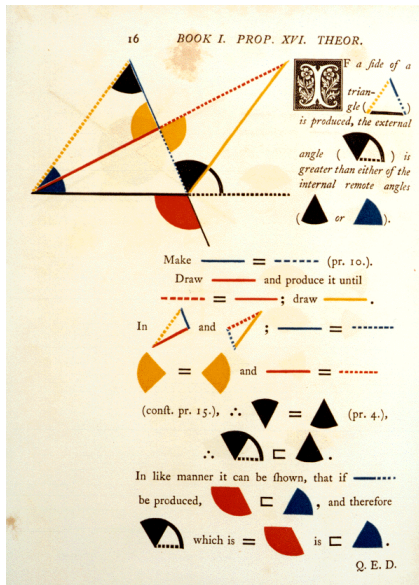
$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

- ▶ Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsahích.¹⁰
- ▶ Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

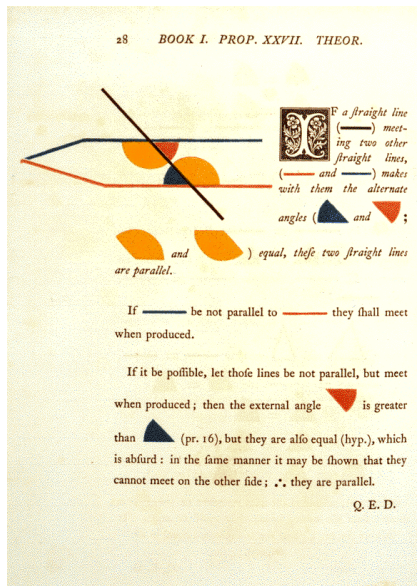
⁸Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 13).

⁹Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 14).

¹⁰Podrobněji od s. 15...

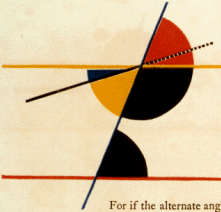



¹¹<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html>


















¹²<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html>

30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.




 STRAIGHT line
 (—) falling on
 two parallel straight
 lines (— and
 —), makes the alternate
 angles equal to one another; and
 also the external equal to the in-
 ternal and opposite angle on the
 same side; and the two internal
 angles on the same side together
 equal to two right angles.

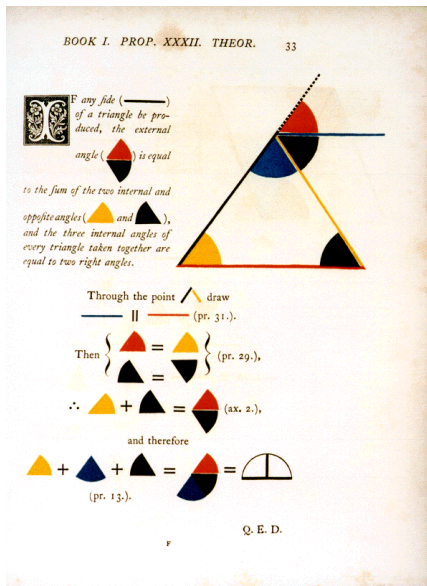
For if the alternate angles  and  be not equal,
 draw —, making  =  (pr. 23).
 Therefore — || — (pr. 27.) and there-
 fore two straight lines which intersect are parallel to
 the same straight line, which is impossible (ax. 12).

Hence the alternate angles  and  are not
 unequal, that is, they are equal:  =  (pr. 15);
 \therefore  = , the external angle equal to the inter-
 nal and opposite on the same side: if  be added to
 both, then  +  =  =  (pr. 13).

That is to say, the two internal angles at the same side of
 the cutting line are equal to two right angles.

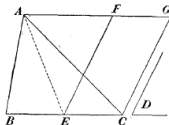
Q. E. D.

¹³<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html>

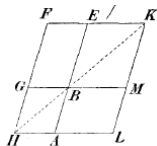


¹⁴<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html>

- ▶ *Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.*
- ▶ *Trojúhelník ABC a rovnoběžník $ECGF$ mají stejný obsah (kde $E =$ střed BC a $BC \parallel AF$):*



- ▶ *Rovnoběžníky $BEFG$ a $BALM$ mají stejný obsah (kde společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):*



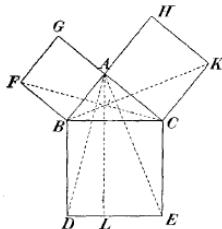
- ▶ *Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta Pythagorova. . .*

¹⁵Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 17, 18).

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A .

Potom platí $BP \cdot BC = BA^2$ a $CP \cdot CB = CA^2$, tudíž $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



Důkaz.

- ▶ $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý \implies body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB .
- ▶ Odtud podle zákl. věty o obsahích, shodnosti trojúh. FBC a ABD a znovu podle zákl. věty o obsahích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.

Obdobně to funguje na druhé straně...



36 BOOK I. PROP. XXXV. THEOR.



ARALLELOGRAMS
on the same base, and
between the same paral-
lels, are (in area) equal.

On account of the parallels,

$$\begin{array}{l} \text{red triangle} = \text{blue triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{black triangle} = \text{white triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{and } \text{blue triangle} = \text{red triangle} \quad (\text{pr. 34.}) \end{array}$$

But, $\text{yellow trapezoid} = \text{yellow trapezoid}$ (pr. 8.)

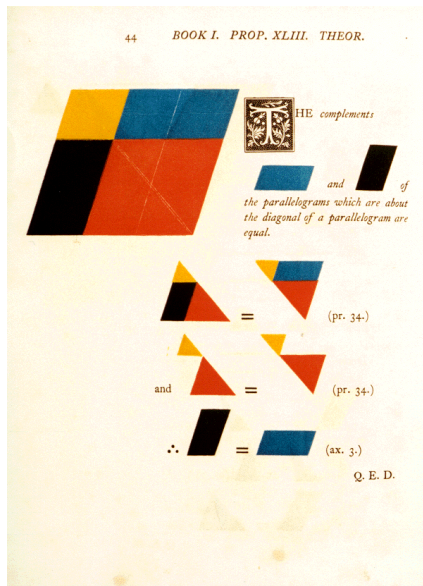
$$\therefore \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{blue triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{red triangle}$$

$$\text{and } \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{black triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{white triangle}$$

$$\therefore \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{black triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{white triangle}$$

Q. E. D.

¹⁶<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html>



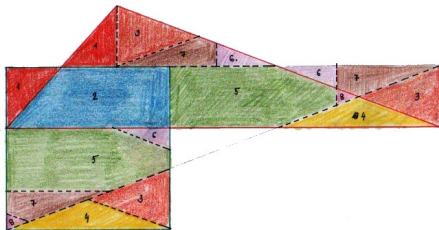
¹⁷<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html>

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojít čtverec se stejným obsahem.¹⁸

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním . . .

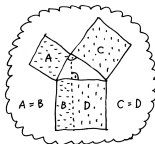
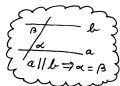
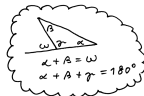
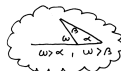
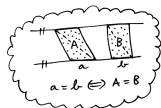
Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah \iff jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.

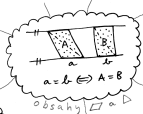
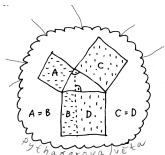


Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

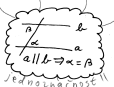
¹⁸<http://ggbtu.be/mkripDpYd>



1. PATRO



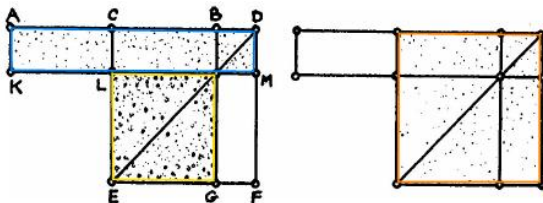
PŘÍZEMÍ



SUTERÉN



... geometrické konstrukce vs. algebraická vyjádření...



Obrázek 4.11: **A** II.6: Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B , potom platí $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$.

Poznámky

Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce. Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice...

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 25)...

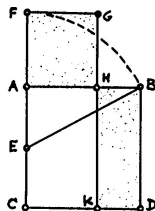
Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

Konstrukce

- (i) AC je kolmice k AB , přičemž $AC = AB$,
 - (ii) E = střed AC ,
 - (iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,
 - (iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$.
- Potom AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB .

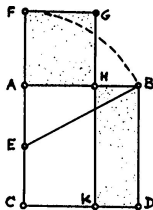


Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 22) a z Pythagorovy věty (s. 16):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2, \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník $CFGK$ a čtverec $ABDC$ mají stejný obsah. Tyto však mají společnou část $CKHA$, takže taky čtverec $AHGF$ a obdélník $KDHB$ mají stejný obsah. To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH, \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \quad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x), \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2, \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx - b^2 = 0.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Skutečně, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 + bx - b^2 = 0 \dots$

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- ▶ **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- ▶ **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,¹⁹
- ▶ **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Nic dalšího neumíme a nic dalšího ani sestrojít nelze:

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem \iff jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\quad} \quad (\quad)$$

¹⁹Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. 50.

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

- (a) průnik dvou přímek \rightsquigarrow soustava dvou lineárních rovnic,
- (b) průnik přímky s kružnicí \rightsquigarrow soustava lineární a kvadratické rovnice,
- (c) průnik dvou kružnic \rightsquigarrow soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...

Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Poznámka

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ vypadá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c, \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vyjádření

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

- (a) zdvojení krychle $\leadsto x = \sqrt[3]{2a}$,
- (b) rozvinutí kružnice $\leadsto x = 2\pi r$,
- (c) kvadratura kruhu $\leadsto x = \sqrt{\pi}r$,
- (d) roztřetí úhlu $\leadsto x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,
- (e) pravidelné mnohoúhelníky $\leadsto \dots\dots$ (s. 47)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.²⁰

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

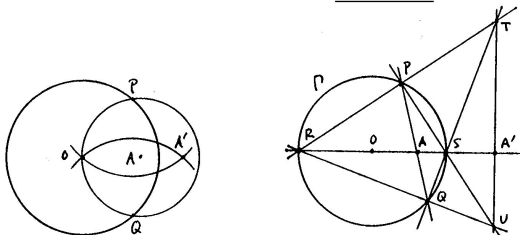
- ▶ problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- ▶ problémy (d) a (e) ve speciálních případech řešitelné jsou.

²⁰r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



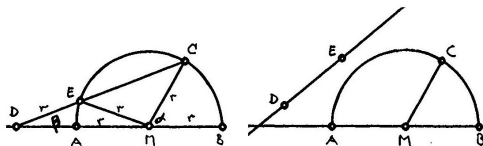
Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O .

Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky \iff je proveditelná mascheroniovsky \iff je proveditelná steinerovsky.²¹

²¹Tvrzení vyplývá z předchozího (s. 26); obvykle však **nebývá** jasné, jak odp. konstrukce provést...

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)

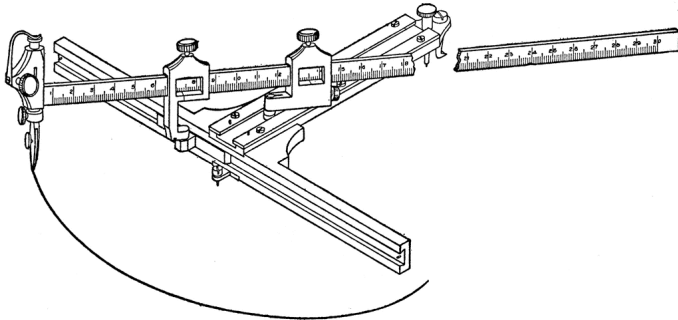


Archimédés: Trisekce úhlu s označeným pravítkem...

Poznámka

Takto lze sestavit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 27...²²

²²http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

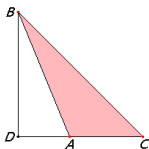


Konstrukce elipsy pomocí *neuseis* udělatka.

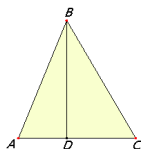
Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 16) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC , kde $D =$ pata výšky z vrcholu B , platí:



$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC,$$



$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 = \\ &= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square \end{aligned}$$

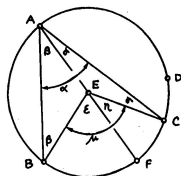
Poznámka

Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

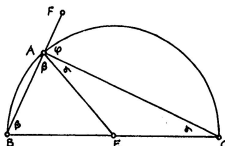
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 10) uvádíme:²³

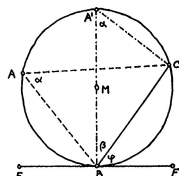
- ▶ větu o středovém a obvodovém úhlu,
- ▶ spec. případ — Thaletovu větu,
- ▶ větu o úsekovém úhlu,
- ▶ apod.



$$\mu = 2\alpha = \text{konst.}$$



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



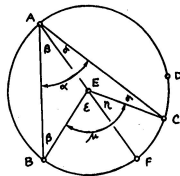
$$\varphi = \alpha$$

²³<https://ggbm.at/MtseAe67>

Pro kružnici se středem E a úseč BC je úhel BEC středový (ozn. μ) a úhel BAC obvodový (ozn. α):

Věta

Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ($\mu = 2\alpha$).
Proto jsou obvodové úhly k téže úseči **všechny stejné**.



Důkaz.

- ▶ Trojúhelník ABE je rovnoramenný \implies úhly u základny jsou stejné (ozn. β).
- ▶ Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $ABE \implies$ vnější úhel $\underline{\varepsilon = 2\beta}$.

Ze stejných důvodů platí také $\eta = 2\gamma$, odkud plyne $\mu = 2\alpha$.

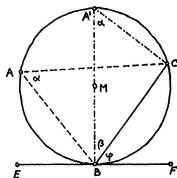
Podobně by se zdůvodnily i ostatní varianty. . .



Pro kružnici, úseč BC a tečnu BF je úhel CBF úsekový (ozn. φ):

Věta

Úsekový úhel k dané úseči je stejný jako úhel obvodový ($\alpha = \varphi$).



Důkaz.

- ▶ Věta o obvodovém úhlu \implies úhel BAC je stejný pro lib. A (ozn. α).
- ▶ Vezměme A' tak, aby $A'B$ byl průměrem kružnice ($\angle A'BC$ ozn. β).
Věta o tečně $\implies \underline{\varphi + \beta = 90^\circ}$.
- ▶ Thaletova věta \implies úhel u C je pravý.
Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $A'BC \implies \underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$.

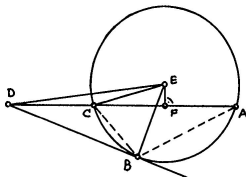
Celkem tedy $\alpha = \varphi$.



Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A :

Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.



$$DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$$

Důkaz 1.

Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (pro pravoúhlé trojúhelníky DBE , DFE , CFE) a pár úpravami:²⁴

$$\begin{aligned} DB^2 &= DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) = \\ &= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC. \end{aligned}$$

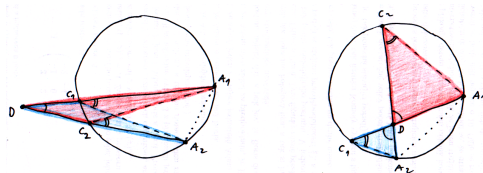


²⁴Třeba rozlišovat, zda je bod D uvnitř nebo vně kružnice!

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A :

Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je stále **stejný**.



$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \dots = \text{konst.}$$

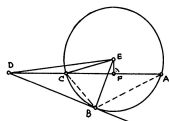
Důkaz 2.

Alternativně (a univerzálně) pomocí podobných trojúhelníků:

- ▶ Věta o obvodových úhlech \implies vyznačené úhly u vrcholů C_i jsou stejné.
- ▶ Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné \implies trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou podobné.
- ▶ Tedy $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$, což je ekvivalentní $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$. \square

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí

$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

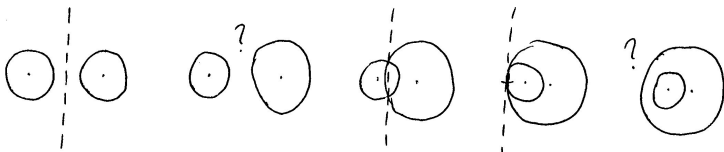


Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

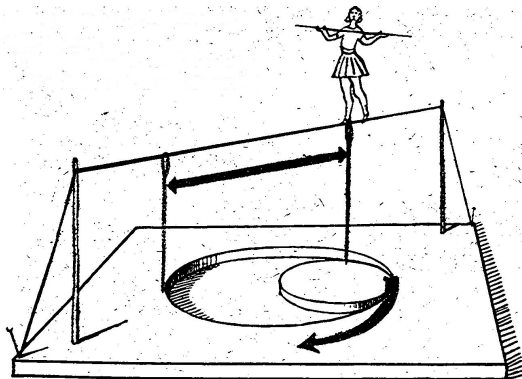
Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.



Věta

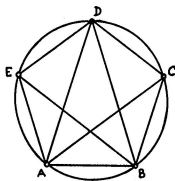
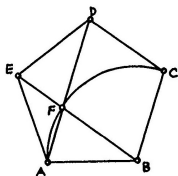
Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.²⁵

²⁵Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...



Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý...

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.



Postřehy

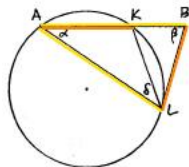
- (1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \parallel BC$ a $BE \parallel CD \implies BCDF$ je kosočtverec.
- (2) Obvodové úhly BAC , CAD , DAE atd. jsou všechny shodné \implies trojúhelník ABD je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu D , tzv. zlatý trojúhelník.
- (3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.

Pravidelný 5-úhelník lze sestavit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestavit pomocí zlatého řezu:

Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:

poměr ramene a základny je **zlatý** \iff trojúhelník je **zlatý**.



Důkaz.

Předp. $AK =$ delší část zlatého řezu AB , L takový, že $AL = AB$ a $BL = AK$, chceme $\beta = 2\alpha$:

- ▶ $K =$ zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$, neboli $BA \cdot BK = BL^2$.
- ▶ Toto je mocnost bodu B ke kružnici $AKL \implies BL =$ tečna.
- ▶ Úsekový $\angle BLK =$ obvodový $\angle LAK = \alpha \implies \angle ALB = \alpha + \delta$.
- ▶ $\triangle ABL$ je rovnoramenný $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- ▶ $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$, což je $= \beta$.
- ▶ Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je rovnoramenný $\implies KL = BL = AK$.
- ▶ Proto také trojúhelník AKL je rovnoramenný $\implies \underline{\alpha = \delta}$.

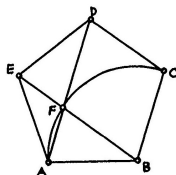
Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$.



Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:

Věta

Úhlopříčky pravidelného 5-úhelníku se protínají v poměrech **zlatého řezu**. . . ²⁶



Důkaz.

- ▶ Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou podobné.
- ▶ Odpovídající si strany jsou úměrné $\implies AD : DE = EA : AF$.
- ▶ Současně však platí $DE = EA = DF$, tedy

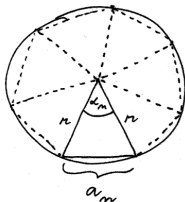
$$AD : DF = DF : FA. \quad \square$$

²⁶... jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.

Středový úhel v pravidelném n -úhelníku je $\alpha_n = 360^\circ/n$.

Velikost strany pravidelného n -úhelníku veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r \sqrt{2 - 2 \cos \alpha_n}.$$



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36^\circ$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72^\circ$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

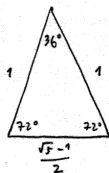
Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

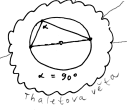
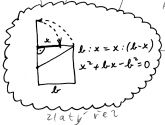
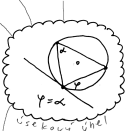
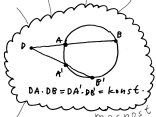
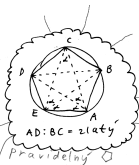
a (podle kosinové věty) $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r \sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dots = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$



2. PATRO



1. PATRO

Pravidelný n -úhelník umíme sestrojít pro $n = 3, 4, 5, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojít také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \dots$

Kombinací předchozího lze sestrojít také např. pro $n = 15, \dots$

Věta

Pokud lze sestrojít pravidelný k -úhelník a l -úhelník, potom lze sestrojít také pravidelný n -úhelník, kde $n =$ nejmenší společný násobek k a l .²⁷

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. k, l nesoudělné.

Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

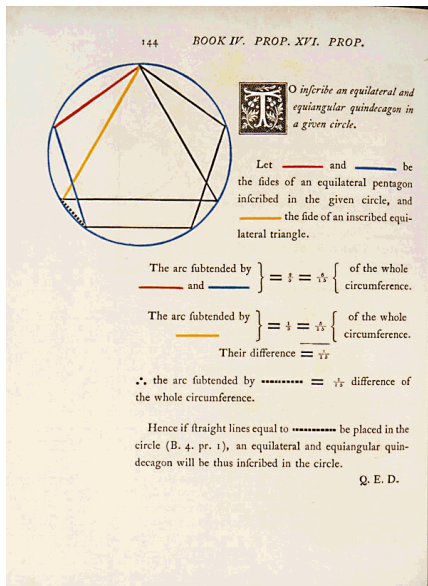
$$\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l}\right) \cdot 360^\circ = \frac{al + bk}{k \cdot l} \cdot 360^\circ.$$

Bezout: k, l nesoudělné $\implies al + bk = 1$, pro nějaká celá čísla a, b, \dots

\dots , tedy umíme středový úhel $k \cdot l$ -úhelníku.



²⁷Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!



Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n -úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem \iff n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni²⁹ je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

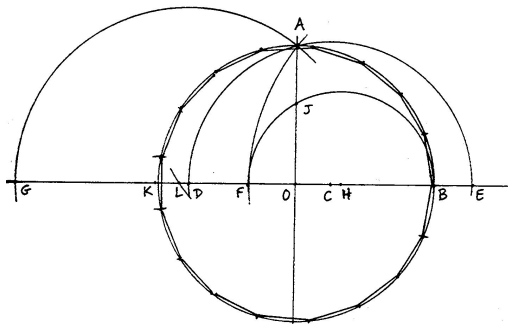
lze	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17	20		
nelze				7	9	11	13	14		18	19	21	22

²⁹22. května 2021, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

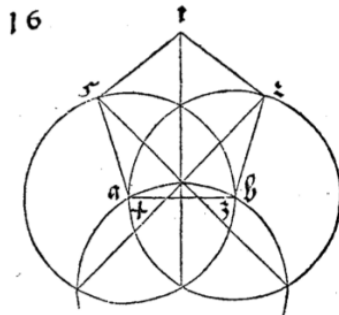
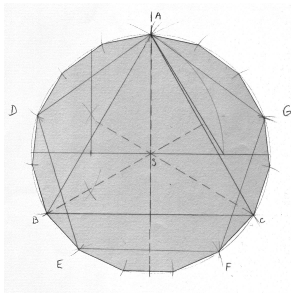
Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

$$a_{17} = \frac{r}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto³⁰



³⁰30. března 1796, viz <https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon>



Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných...

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \cong mb \iff nc \cong md.$$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.

Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:³¹

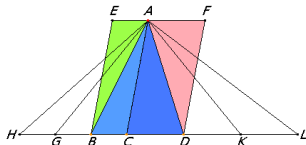
Reálná čísla $r (= \frac{a}{b})$ a $s (= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo $q (= \frac{m}{n})$ platí

$$r \cong q \iff s \cong q.$$

³¹ Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základů.



$$\text{obsah } ACB : \text{obsah } ACD = CB : CD$$

Důkaz.

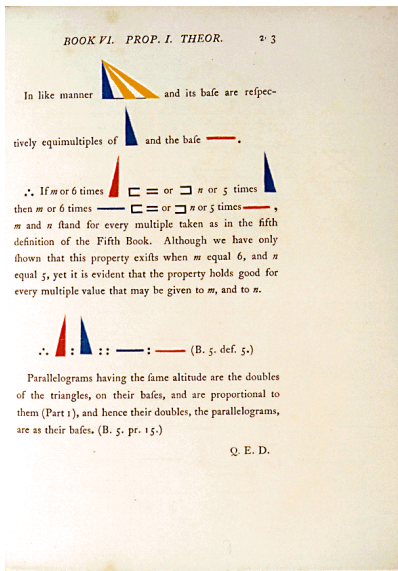
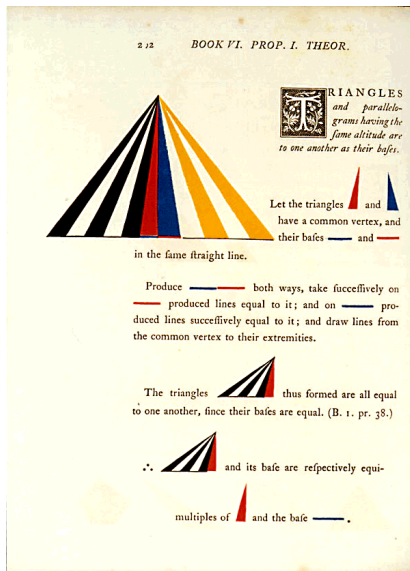
Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 17) a z definice rovnosti poměrů (s. 50)... □

Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

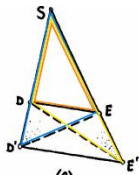
$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a .



Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku \iff protíná zbylé dvě strany úměrně.



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$

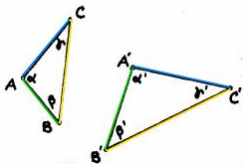
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

Jmenovatelé na pravé straně jsou totiž a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný průnik SDE . Tedy:

Rovnost poměrů $SD' : SD$ a $SE' : SE \iff$ rovnost obsahů $DD'E$ a $EE'D \iff$ rovnoběžnost $D'E'$ a DE (s. 17). □

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$

$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

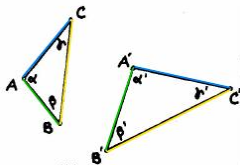
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti}.$$

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 54) jsou ekvivalentní:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly \iff strany u shodných úhlů jsou úměrné.



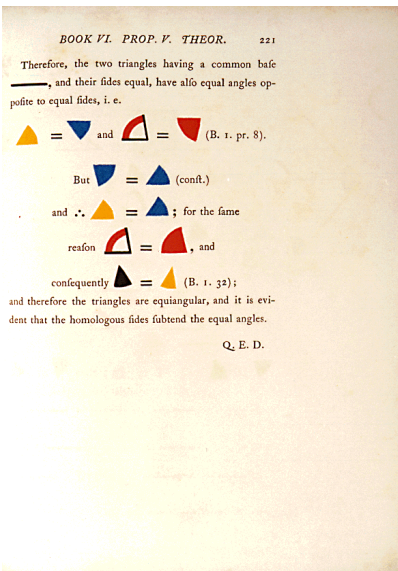
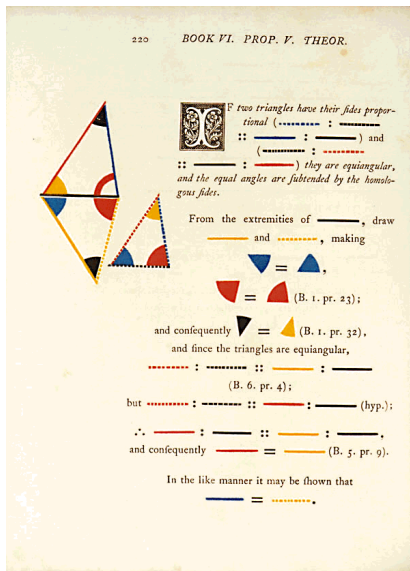
$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c', c : a = c' : a', a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

Implikace zleva doprava je důsledkem předchozí věty (s. 53)...

Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník ABD , který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$.

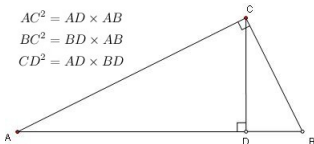
Nyní strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu, tedy jsou shodné... □



Implikaci „ \implies “ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- ▶ Věta o mocnosti bodu ke kružnici (s. 36).
- ▶ Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 41).
- ▶ Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 16):



Důkaz.

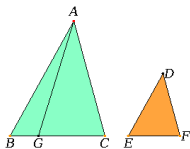
Trojúhelníky ADC a ACB mají po dvou shodné vnitřní úhly \implies jsou podobné

$$\implies AC : AD = AB : AC \implies AC^2 = AB \cdot AD.$$

Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně... □

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.



Je-li koeficient podobnosti = k , potom poměr obsahů = k^2 .

Poznámky k důkazu

Snadné pro $k \in \mathbb{Z}$, resp. $k \in \mathbb{Q}$. (dělení na menší navzájem shodné trojúhelníčky)

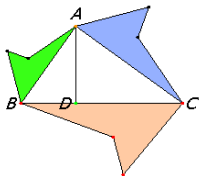
Problematické pro $k \in \mathbb{R}$ — možné přístupy:

- ▶ limitní přechod, (libovolně jemné dělení)
- ▶ vzoreček, (viz s. 51)
- ▶ “elementární” trik.

(pomocný bod $G \in BC$ takový, že $EF : BG = \dots = k : 1$; úpravy a předchozí základní tvrzení \leadsto obsah ABC : obsah DEF = obsah ABC : obsah ABG = $k^2 : 1$)

Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.

**Důkaz.**

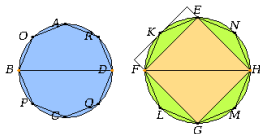
Plyne z předchozího tvrzení (s. 58) a z Pythagorovy věty (s. 16)...



U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhne...³⁴

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.

Každé dva kruhy jsou podobné a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.

Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 58)... □

Poznámka

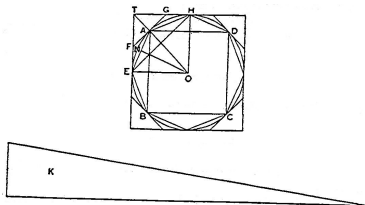
Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2, \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.}$$

³⁴... v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



Poznámky

Jinými slovy: $S = \frac{1}{2}r \cdot o$, kde r = poloměr kružnice a o = její obvod.
To spolu s rovností na s. 60 dává

$$S = \frac{1}{2}r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!
Při tradičním značení:

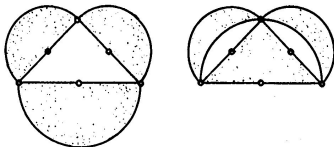
$$S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.$$

³⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Area_of_a_circle#Archimedes's_proof

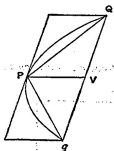
Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat umíme (s. 19), kruh neumíme (s. 27).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat lze:

- ▶ Hippokratés: Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají stejný obsah jako tento trojúhelník.³⁶



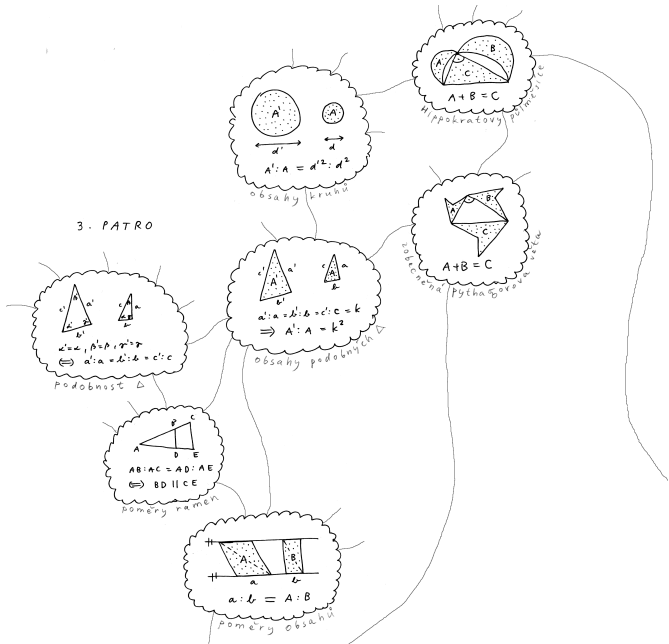
- ▶ Archimédés: Obsah parabolické úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníku PQq (což jsou $\frac{2}{3}$ obsahu opsaného rovnoběžníku).³⁷



³⁶ plyne snadno z tvrzení na s. 60, 59 a 32...

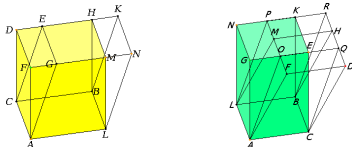
³⁷ plyne z vlastností paraboly a součtu jisté geometrické řady...

3. PATRO

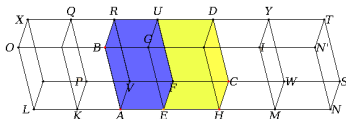


K tvrzením o rovnoběžnících (s. 15, s. 51, s. 58) máme tyto 3D **analogie**:

- ▶ Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.



- ▶ Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.

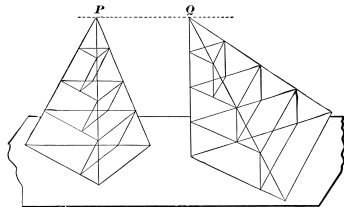


- ▶ Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázkou jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.



Idea důkazu.

Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem hranolů. Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami. Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 64)... □

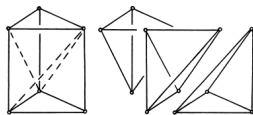
Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.³⁸

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde V = objem jehlanu, S = obsah podstavy a v = velikost odpovídající výšky.



Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů!³⁹

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 19) obecně **neplatí**.

³⁸http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

³⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

S podobnými úvahami jako na s. 65 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

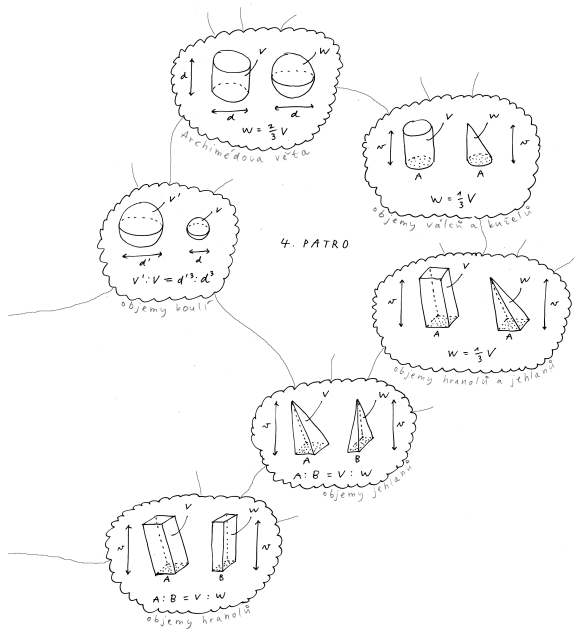
- ▶ *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav,*
- ▶ *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů,*
- ▶ *objem kužele je roven $\frac{1}{3}$ objemu jemu opsaného válce,*
- ▶ *apod.*

Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\frac{2}{3}$ objemu jemu opsaného válce.⁴⁰

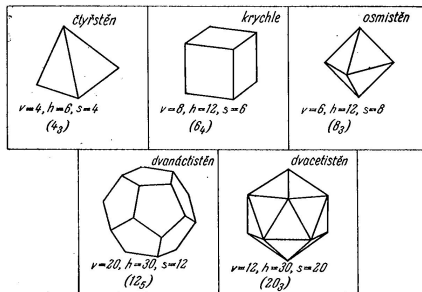
⁴⁰viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip



- = pravidelné konvexní mnohostěny
- = konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky⁴¹









Věta

Platónských těles je právě pět druhů:



⁴¹ \implies mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

- (1) Platónských těles není víc než pět druhů:
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:

			
{3,3} Defect 180°	{3,4} Defect 120°	{3,5} Defect 60°	{3,6} Defect 0°
			
{4,3} Defect 90°	{4,4} Defect 0°	{5,3} Defect 36°	{6,3} Defect 0°
<p>A vertex needs at least 3 faces, and an angle defect. A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling. By Descartes' theorem, the number of vertices is $720^\circ/\text{defect}$.</p>			

- (2) Platónských těles je právě pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:
- ▶ čtyřstěn {3, 3}, krychle {4, 3}, osmistěn {3, 4} jsou snadné,
 - ▶ pro rozbor dvacetistěnu {3, 5} a dvanáctistěnu {5, 3} budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 43)...

Bubínek:

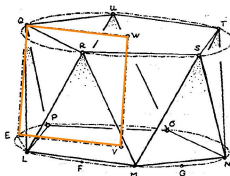
$QL = QR =$ strana vepsaného 5-úhelníku,

$LE =$ strana vepsaného 10-úhelníku,

$LEQ =$ pravoúhlý trojúhelník.

Proto podle s. 43:

- ▶ $EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku = poloměr kružnice.



$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

Čepičky:

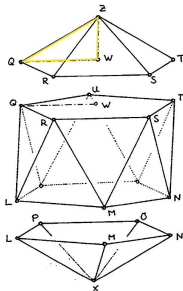
QWZ = pravouhlý trojúhelník,

$QZ = QR$ = strana vepsaného 5-úhelníku,

QW = strana vepsaného 6-úhelníku.

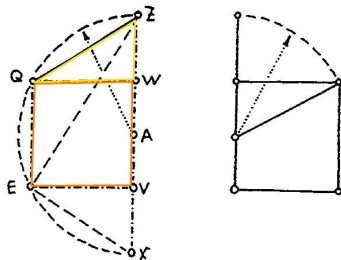
Proto podle s. 43:

- ▶ WZ = strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.



WZ = delší část zlatého řezu úsečky WQ .

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule...



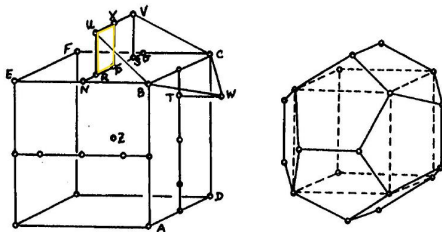
Řez dvacetistěnu a řez zlatý.⁴²

⁴²viz konstrukci na s. 23

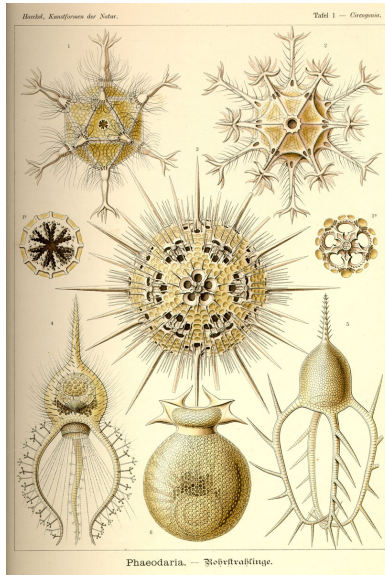
Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy U, V, W podle obr. . .

. . . a postupně se zdůvodní, že:

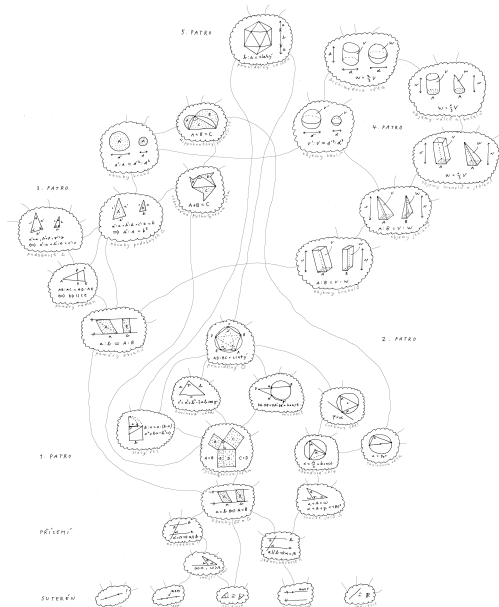
- ▶ body $UBCWV$ leží v jedné rovině,
- ▶ pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný,
- ▶ vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná.



$RU = RP =$ delší část zlatého řezu úsečky PN .



Circogonia icosahedra vlevo nahoře.



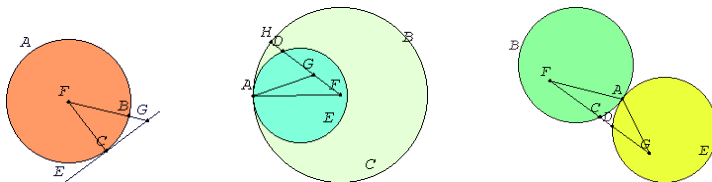
⁴³<https://is.muni.cz/el/ped/jaro2021/MA0007/um/prednaska/zaklady.pdf>

Základy	4
Dotykové úlohy	77
Úvod	78
Základní úlohy	80
Zobecnění	84
Obecná Apollóniova úloha	86
Geometrická zobrazení	90
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.



Věta

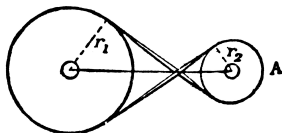
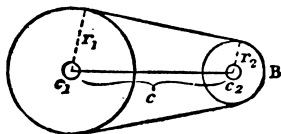
Přímka se dotýká kružnice v bodě $C \iff$ je kolmá k průměru FC .

Kružnice se dotýkají v bodě $A \iff$ spojnice jejich středů prochází bodem A .⁴⁴

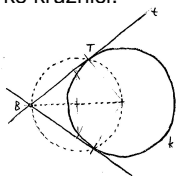
⁴⁴Důkazy zpravidla nepřímo, viz např.

Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

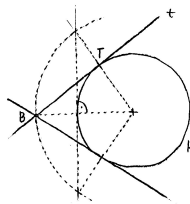
- ▶ *cyklus* = orientovaná kružnice,
- ▶ *paprsek* = orientovaná přímka,
- ▶ *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.



Tečna z bodu ke kružnici:

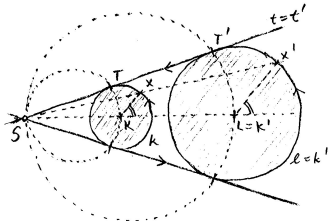


(a) pomocí Thaletovy kružnice

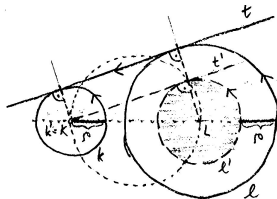


(b) pomocí **souměrnosti**

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



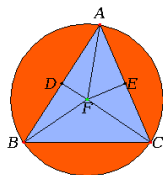
(a) pomocí **stejnolehlosti**



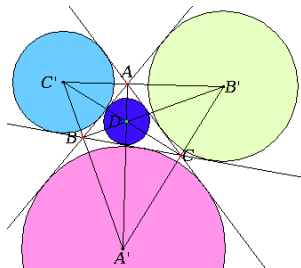
(b) pomocí **dilatace**⁴⁵

⁴⁵...redukováno na předchozí případ.

Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:

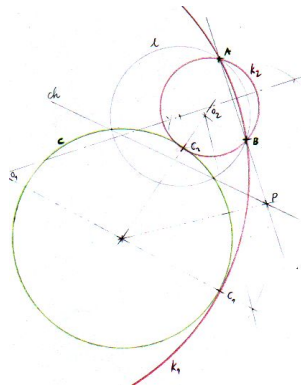
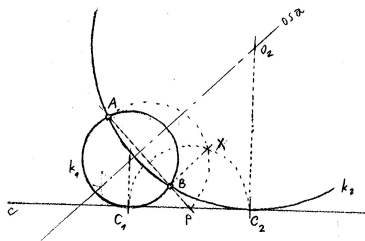


pomocí os úseček,



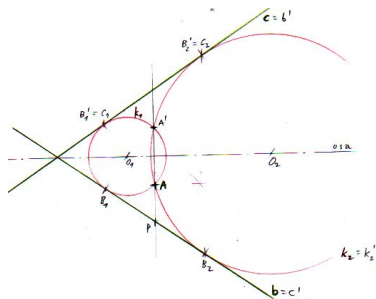
os úhlů

Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:

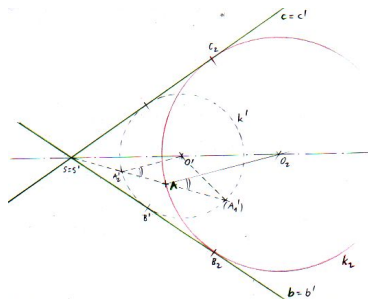


např. pomocí mocnosti

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



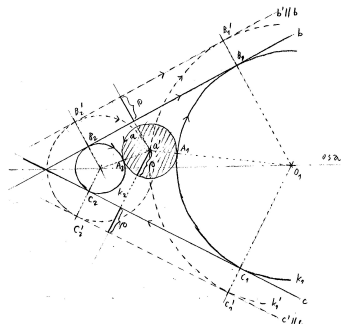
(a) pomocí **souměrnosti**⁴⁶



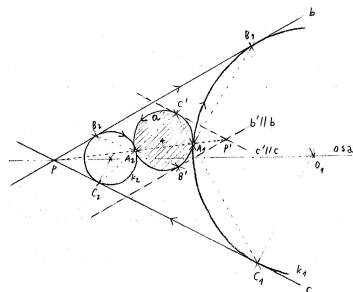
(b) pomocí **stejnolehlosti**

⁴⁶... redukováno na předchozí případ (s. 82).

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímk:



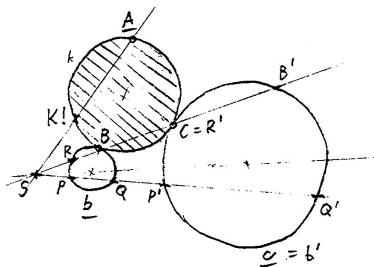
(a) pomocí **dilatace**⁴⁷



(b) pomocí **stejnolehlosti**

⁴⁷...redukováno na předchozí případ (s. 83).

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou kružnic:



Pomocí **stejnolehlosti** a mocnosti lze ukázat, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Tím je bod K jednoznačně určen, umíme jej sestrojít, ...⁴⁸

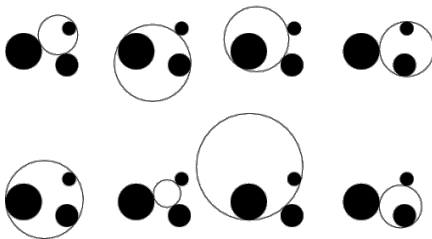
⁴⁸... a tím redukováno na předchozí případ (s. 82).

= dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

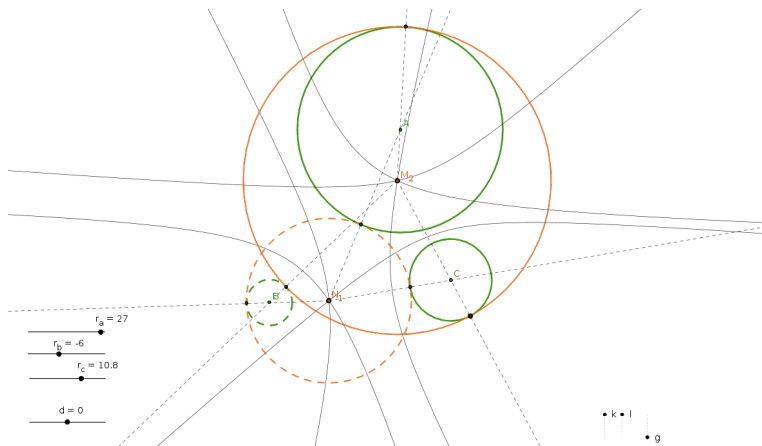
$$\lim_{r \rightarrow 0}(\text{kružnice}) = \text{bod}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty}(\text{kružnice}) = \text{přímka}.$$

Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po dvojcích:



Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací. . . ⁴⁹

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace* . . .



Středů všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku.

⁴⁹http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

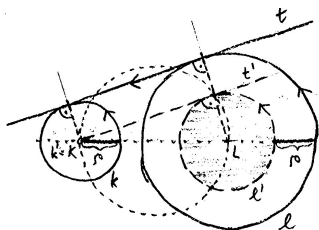
- ▶ souměrnosti,
- ▶ stejnolehlost,
- ▶ dilatace,
- ▶ kruhová inverze,
- ▶ apod.

Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. [91](#)...

Ukázka typického použití na s. [102](#)...

Základy	4
Dotykové úlohy	77
Geometrická zobrazení	90
Dilatace a kontaktní zobrazení	91
Kruhová inverze a konformní zobrazení	93
Souměrnosti a shodná zobrazení	109
Stejnolehlost a podobná zobrazení	114
Osová afinita a afinní zobrazení	122
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	131
Osová kolineace a projektivní zobrazení	145
Shrnutí a přehledy	153
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 80):



Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- ▶ nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (bez kontextu),⁵¹
- ▶ měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- ▶ není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale **orientovaný dotyk**,
- ▶ orientovaný dotyk (dvou křivek) nejsnáze znázorníme (tečným) vektorem. . .

⁵¹Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto kurzu!

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ .

Jak je určena? Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem \mathbf{v} je reprezentován vektorem \mathbf{v}' , který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k \mathbf{v} , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci. . .



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

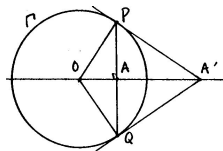
K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 80, 84, 103, . . .)!

Co to je? Transformace roviny vyjma jednoho bodu, ozn. O .⁵²

Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r .⁵³

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA , a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2, \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí pevných bodů,
základní konformní transformace v rovině, nepřímá, ...

⁵²tzv. střed kruhové inverze

⁵³tzv. řídicí kružnice

Zřejmé:

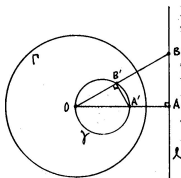
- (a) Kruhová inverze je involutivní transformace.
- (b) Všechny body na řídící kružnici jsou pevné.
- (c) Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.
- (d) Každá přímka procházející středem inverze je pevná; přitom jediné pevné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X' = O, \quad \text{resp.} \quad \lim_{X \rightarrow O} X' = \infty.$$

Nezřejmé:

- (e) Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.
- (f) Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ .
- (g) Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O .
- (h) Kruhová inverze je konformní zobrazení.

- (e) Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.



Důkaz.

Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ .

Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O .

Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ :

- ▶ Thaletova věta \implies úhel $OB'A'$ je pravý \implies trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou podobné \implies

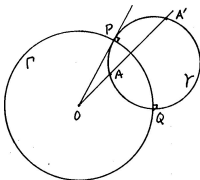
$$OB' : OA = OA' : OB \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

- ▶ Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ , takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2. \quad \square$$

(f) Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.

Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ .



Důkaz.

Kružnice γ protíná řídicí kružnici Γ kolmo⁵⁴

\iff poloměr OP je tečnou ke kružnici γ

\iff pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí⁵⁵

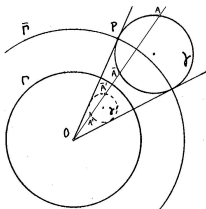
$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$$

\iff body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ . □

⁵⁴tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé

⁵⁵podle věty o mocnosti bodu ke kružnici (s. 36)

- (g) Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O .



Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je stejnolehlost.⁵⁶

- Označme $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

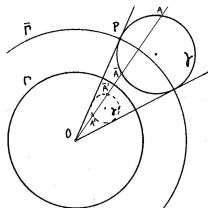
$$OA \cdot OA' = r^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = \bar{r}^2.$$

- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = r^2 : \bar{r}^2 = \mathbf{konst.}, \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \mathbf{konst} \cdot OA. \quad \square$$

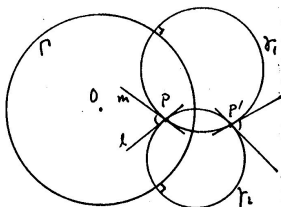
⁵⁶... zbytek je jasný: z předchozího (s. 96) a vlastností stejnohlosti (s. 117) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

Při stejnolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ zobrazuje na střed γ' .



Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ **nezobrazuje** na střed γ' !
(Viz též obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma} \dots$)

(h) Kruhová inverze je konformní zobrazení.⁵⁷



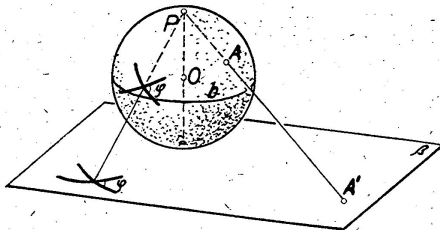
Důkaz.

- ▶ Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě P = odchylka jejich tečen m a ℓ .
- ▶ Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.
- ▶ Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2 , které jsou kolmé k řídicí kružnici Γ !
- ▶ Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují samy do sebe (s. 96), obrazem bodu P je druhý společný bod P' kružnic a odchylka v bodě P je stejná jako odchylka v bodě P' . □

⁵⁷... úhlojevné, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Každé podobné zobrazení je konformní.

Dalším známým **nepodobným** konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):

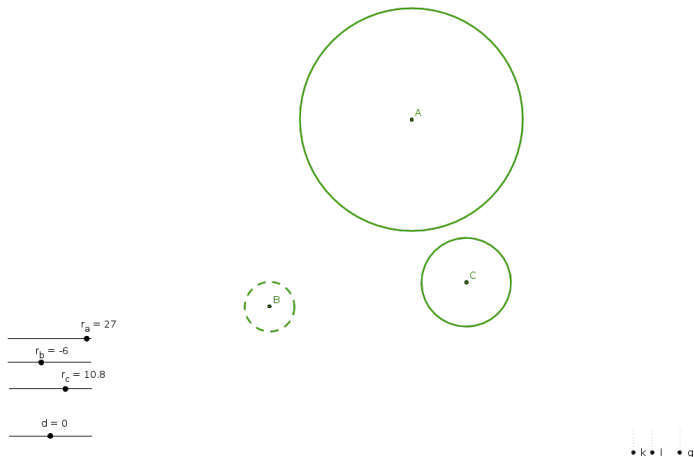


Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

- ▶ **nezachovávají vzdálenosti ani poměry vzdáleností,**
 - ▶ **nezobrazují přímky na přímky,**
 - ▶ **nezachovávají obsahy, resp. objemy,**
-
- ▶ ale zachovávají odchylky protínajících se křivek,
 - ▶ jsou prostá (injektivní).

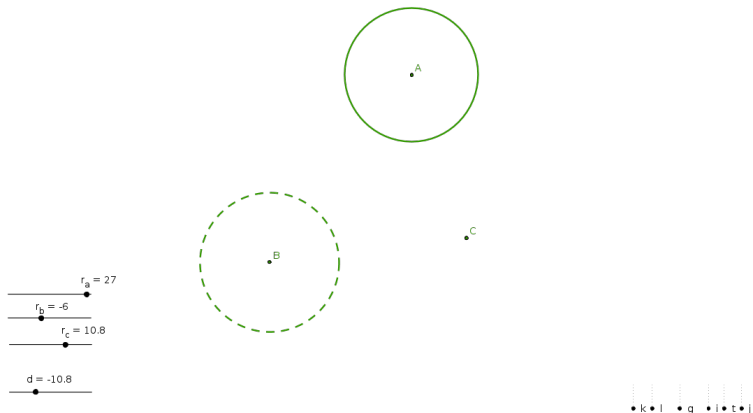
Orientovaná Apollóniova úloha:⁵⁸



Sestrojít cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

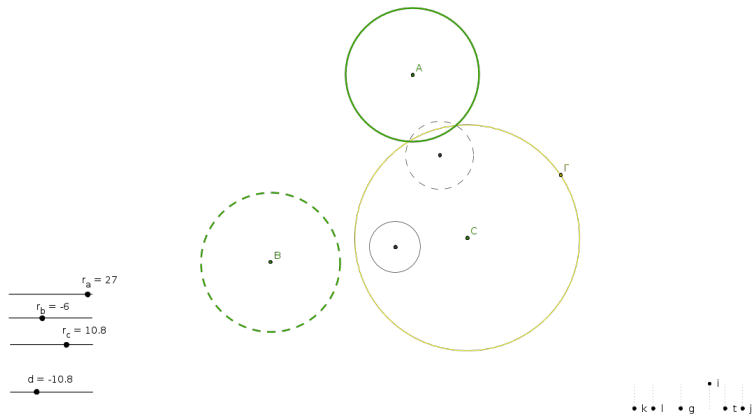
⁵⁸<http://ggbtu.be/mrFsNSnbN>

(1) vhodná **dilatace**:



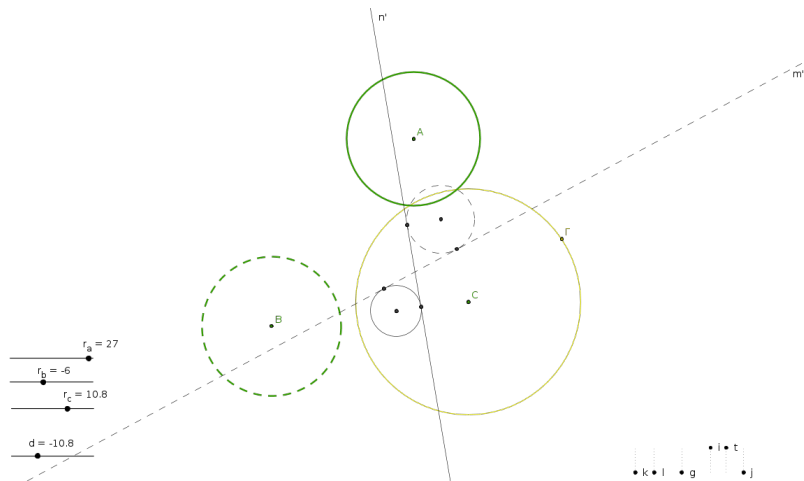
... tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, ...

(2) vhodná **kruhová inverze**:



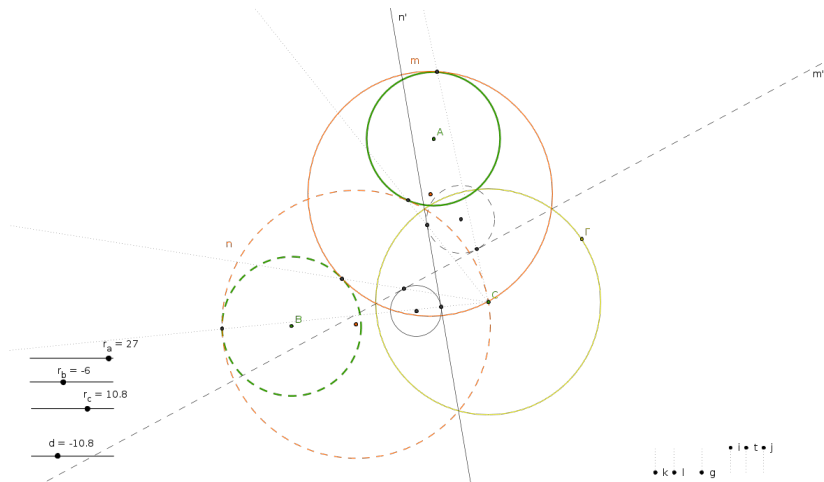
... kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 95), ...

(3) společné tečny dvou kružnic:



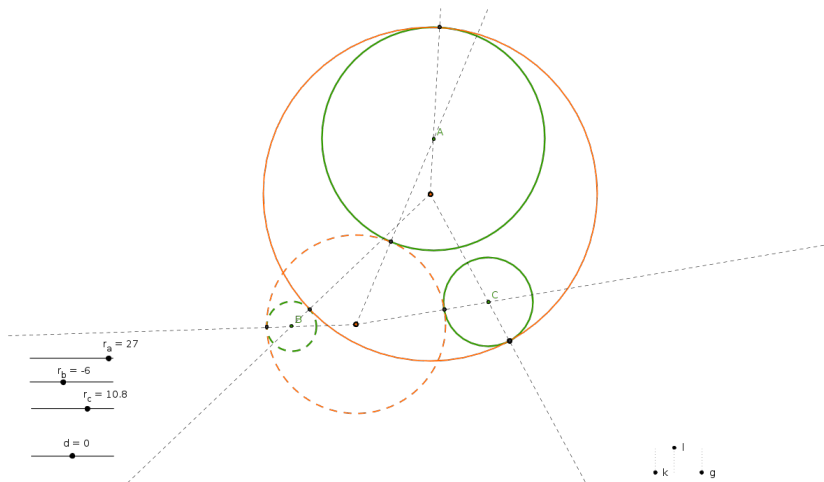
... což je jedna ze základních úloh (s. 80), ...

(4) kruhová inverze zpět:



... což je snadné, ...

(5) dilatace zpět:



... což je taky snadné.



projektivní



afinní



podobná



ekviafinní



shodná

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o .⁵⁹

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_o} = -\overrightarrow{XX_o},$$

kde X_o = průsečík XX' s osou o .



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou pevných bodů,
základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

⁵⁹tzv. osa

Definice

Shodné zobrazení

(a) zachovává vzdálenosti,

tztn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímk,

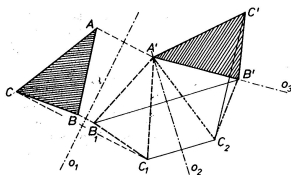
(d) zachovává obsahy, resp. objemy,

(e) je prosté (injektivní).

Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:



Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- ▶ $A \mapsto A' \dots$ dořešíme obrazy $B \mapsto B_1$ a $C \mapsto C_1$,
- ▶ $B_1 \mapsto B' \dots$ dořešíme obraz $C_1 \mapsto C_2$, atd.

□

... proto je osová souměrnost základní shodností v rovině.

Odtud klasifikace shodností v rovině:

- (a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 = o_2$,
- (b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \parallel o_2$,
- (c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou různoběžné,
- (d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \perp o_2$,
- (e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,
- (f) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných os. soum.

Poznámky

Shodnost s přímkou pevných bodů je právě osová souměrnost (e).

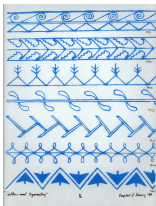
Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci), shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:

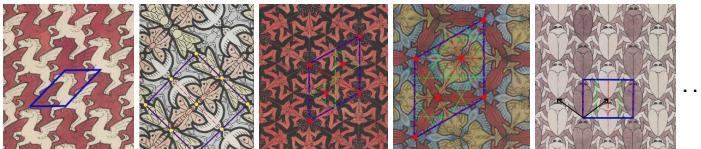


Odtud klasifikace symetrických vzorů, viz např.

- ▶ sedm frízových vzorů⁶⁰



- ▶ sedmnáct tapetových vzorů⁶¹



- ▶ atp.

⁶⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

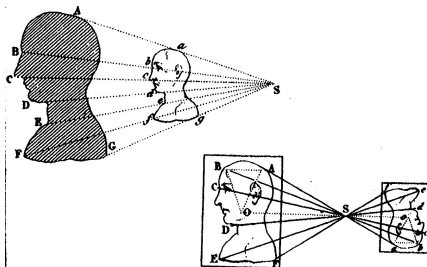
⁶¹http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k .⁶²

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží přímce SX , a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



Jaké má vlastnosti? Transformace se pevným bodem,
základní podobnost, v rovině přímá transformace, . . .

⁶²tzv. střed a koeficient = poměr škálování

Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- ▶ *identita*, pokud $k = 1$,
- ▶ *středová souměrnost*, pokud $k = -1$.

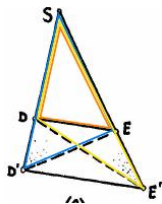
Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- ▶ *zobrazení do jednoho bodu*.

Základní poznatek známe ze s. 53!

Zejména, každá stejnoolehlost je

- ▶ podobné zobrazení, které
- ▶ každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.



Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

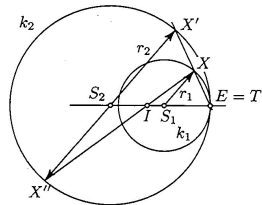
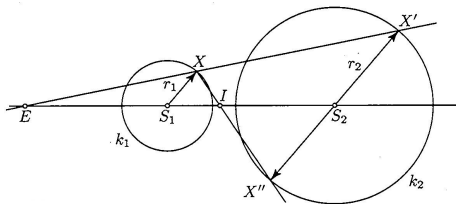
Složení dvou stejnoolehlostí se středy S_1 , resp. S_2 a koeficienty k_1 , resp. k_2 je:

- ▶ *identita, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,*
- ▶ *posunutí, právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,⁶³*
- ▶ *obecná stejnoolehlost, právě když $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.⁶⁴*

⁶³... , přičemž vektor posunutí je násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1 S_2}$

⁶⁴... pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnoolehlosti leží na přímce $S_1 S_2$

Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, ...



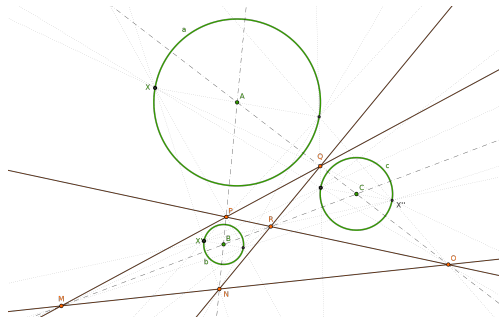
... každé dvě kružnice jsou stejnohlé, ...

... a to dvojím způsobem.

Odtud (pro zajímavost) Mongeova věta:⁶⁵

Věta

Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou čtyři kolineární trojice.



Důkaz.

Plyne z věty o skládání stejnolehlostí (s. 116)... □

⁶⁵... uplatnění např. při řešení obecné Apollóniovovy úlohy

Definice

Podobné zobrazení

(a) zachová poměry vzdáleností,

tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = k \cdot |AB|,$$

kde k = kladná konstanta, tzv. *koeficient podobnosti*.

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

(d) obsahy se mění k^2 -krát, resp. objemy se mění k^3 -krát,

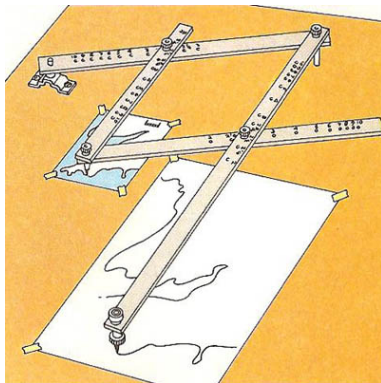
(e) je prosté (injektivní).

Podobnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).

Každé podobné zobrazení je složením nějaké shodnosti a stejnolehlosti.

... proto je stejnolehlost základní podobností.

Pantograf⁶⁶

⁶⁶<http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph>

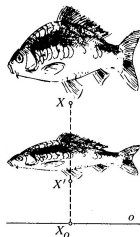
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o , směrem \mathbf{s} a nenulovým reálným číslem m .⁶⁷

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem \mathbf{s} , a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_0} = m \cdot \overrightarrow{XX_0},$$

kde X_0 = průsečík XX' s osou o .



Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů,
základní afinní transformace v rovině,
přímá/nepřímá podle znaménka m , ...

⁶⁷tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciálními, resp. mezními případy osově afinity jsou:

- ▶ *osová souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\mathbf{s} \perp o$,
- ▶ *šikmá souměrnost*, pokud $m = -1$ a $\mathbf{s} \not\perp o$,
- ▶ *elace* aneb *naklonění*, pokud $\mathbf{s} \parallel o$ ($\implies m = 1$),

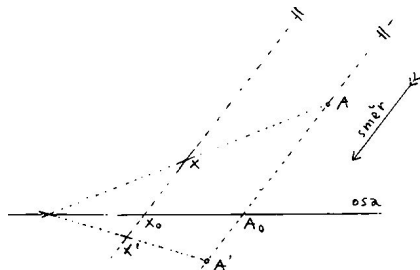


Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- ▶ *rovnoběžné promítání* do přímky o ve směru \mathbf{s} .

Osová afinita zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,
- (c) rovnoběžnost přímek.



Důkaz.

Variace na podobné trojúhelníky...



Osová afinita s osou o , směrem \mathbf{s} a modulem m :

- (d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když $p = o$ nebo $p \parallel \mathbf{s}$,
- (e) je přímá, resp. nepřímá, právě když $m > 0$, resp. $m < 0$,
- (f) je involutivní, právě když $m = -1$,
- (g) obsahy se mění m -krát.

Definice

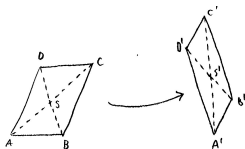
Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) z předchozí strany.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*.

Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmou souměrnost nebo elaci).

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní...⁶⁸



Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) implikuje (b) a (c)...⁶⁹

⁶⁸... založeno na char. rovnoběžníku jako čtyřúhelníku, jehož úhlopříčky se půlí

⁶⁹... viz základní větu afinní geometrie (příští semestr)

Analogicky k tvrzení na s. 111 máme:

Věta

Každá afinita v rovině je složením nejvýše tří osových afinit.

Důkaz.

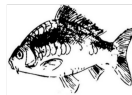
Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci větší. . .



. . . proto je osová afinita základní afinitou v rovině.

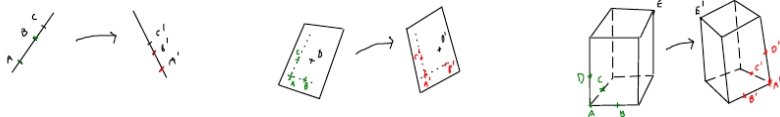
Příklad

Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:



Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy dvou různých bodů...

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze...



Věta

Prostě⁷⁰ afinní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy $n + 1$ bodů v obecné poloze.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí rovnoběžek a přenášení dělicích poměrů...⁷¹



⁷⁰resp. „ne příliš degenerované“, viz dále...

⁷¹<https://ggbm.at/yWcCaQeA>

Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

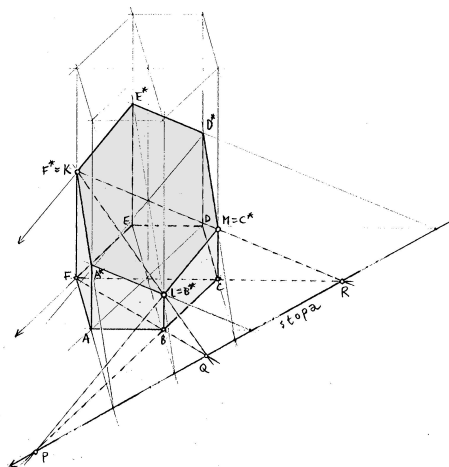
Podobné a ekviafinní zobrazení je shodné.

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s rovinou pevných bodů. . .

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je
rovnoběžné promítání do roviny. . .

Obecné afinní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ zachovává rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ **nemusí** být prosté (injektivní).



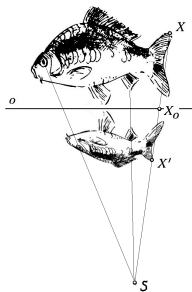
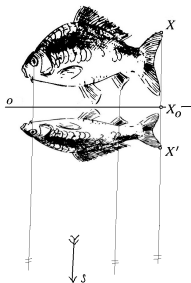
Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou KLM .⁷²

⁷²<http://ggbtu.be/mkvJL3iqr>

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 108):

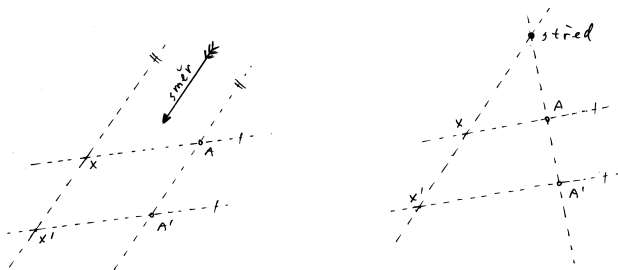
Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné. . .

. . . jako od osově afinity k osové kolineaci. . .



. . . nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému. . .

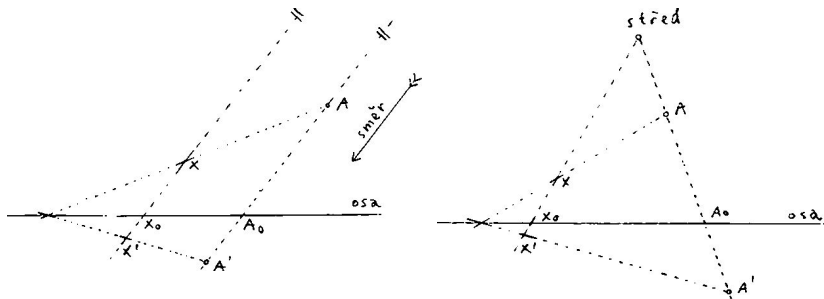
Posunutí vs. stejnolehlost:



- ▶ $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- ▶ $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \dots$ vektor posunutí, $\frac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \dots$ koef. stejnolehlosti,

„Posunutí = stejnolehlost se středem v nekonečnu.“

Osová afinita vs. osová kolineace:



▶ $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr,

$X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,

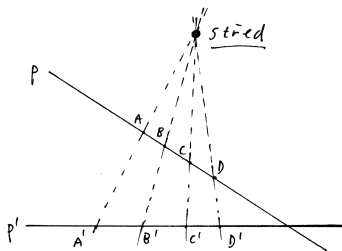
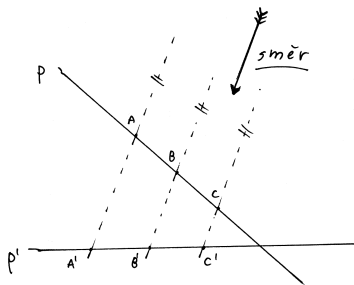
▶ $\frac{\overrightarrow{X'X_0}}{\overrightarrow{XX_0}} = \frac{\overrightarrow{A'A_0}}{\overrightarrow{AA_0}} = \dots$ modul,

???? = ???? = ... modul,⁷³

„Osová afinita = osová kolineace se středem v nekonečnu.“

⁷³kde ???? je nějak určeno body A, A', A_0 a S .

Rovnoběžné vs. středové promítání:



- ▶ $A'A \parallel B'B \parallel \dots$ směr,
- ▶ $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{B'C'} = \frac{\overrightarrow{AC}}{BC} = \dots$ zákl. invariant,

- $A'A \cap B'B \cap \dots$ střed,
- ???? = ????? = ... zákl. invariant,⁷⁴

„Rovnoběžné promítání = středové promítání se středem v nekonečnu.“

⁷⁴kde ???? je nějak určeno body A, B, C a D.

Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB C) : (AB D)$; značíme a zapisujeme takto:

$$(AB CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

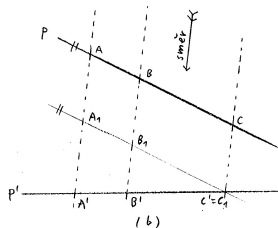
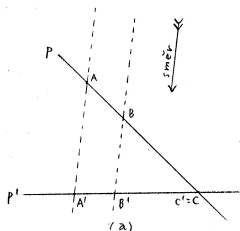
Poznámky

Vzhledem k tomu, že $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB D) = 1$, platí $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB CD) = (AB C)$; stručně

$$(AB CD_{\infty}) = (AB C).$$

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.⁷⁵



Důkaz.

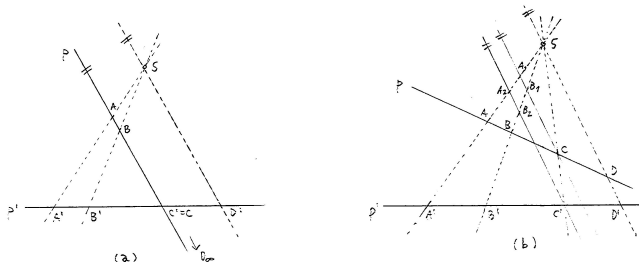
- (a) Spec. případ plyne z podobnosti trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 53).
 (b) Obecný případ plyne z (a) a shodností protilehlých stran v rovnoběžnících.



⁷⁵... pokud se různé body zobrazí na různé body.

Věta (Pappova)

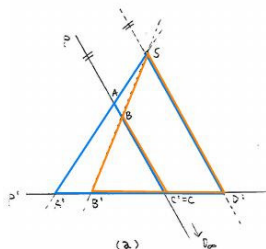
Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.⁷⁶



Důkaz.

- (a) Spec. případ ($C = C'$ a $SD' \parallel p$) plyne z podobnosti trojúhelníků (s. 53) a vztahu $(ABC) = (ABC_\infty)$ (s. 135).
- (b) Obecný případ plyne z (a) a podobnosti trojúhelníků. . . □

⁷⁶... pokud se různé body zobrazí na různé body.



Z modré, resp. oranžové podobnosti plyne

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}} = \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}}.$$

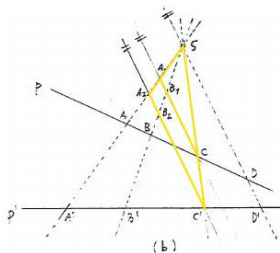
Po dělení

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}},$$

tudíž $(ABC) = (A'B'C'D')$.

Levá strana je však totéž, co $(ABCD_\infty)$, tedy

$$(ABCD_\infty) = (A'B'C'D').$$



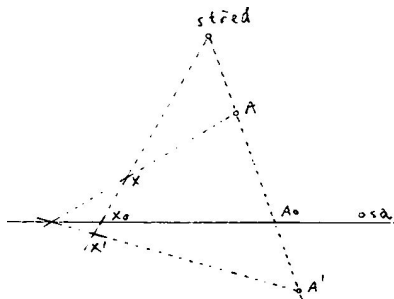
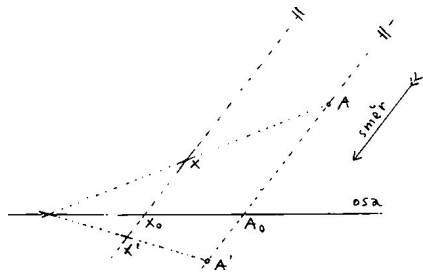
Doplníme rovnoběžky s přímkou SD jdoucí bodem C , resp. C' .

Z (a) plyne $(A_1 B_1 C) = (AB CD)$, resp. $(A_2 B_2 C') = (A' B' C' D')$.

Ze žluté podobnosti plyne $(A_1 B_1 C) = (A_2 B_2 C')$, a tedy

$$(AB CD) = (A' B' C' D').$$

Osová afinita vs. osová kolineace:

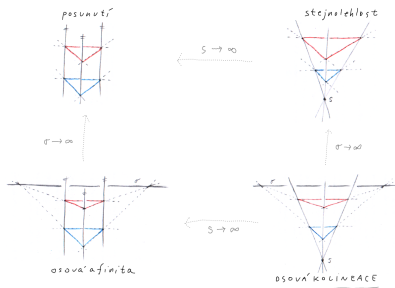


- ▶ $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr,
- ▶ $(X'X X_0) = (A'A A_0) = \dots$ modul,

- $X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- $(X'X X_0 S) = (A'A A_0 S) = \dots$ modul.

Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- ▶ *osová afinita*, pokud S je v nekonečnu,
- ▶ *stejnolehlost*, pokud o je v nekonečnu,
- ▶ *posunutí*, pokud S i o jsou v nekonečnu.

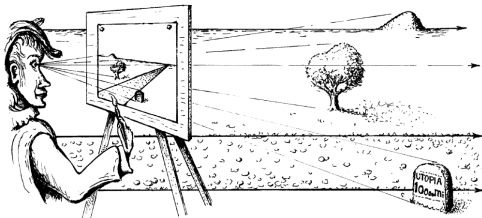


Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerované (neinjektivní) případy:

- ▶ *středové promítání* do přímky o z bodu S .
- ▶ *rovnoběžné promítání* do přímky o , pokud S je v nekonečnu.

Obecná afinní zobrazení fungují v celé rovině, resp. prostoru.

Při osově kolineaci či středovém promítání některé body nemají obraz, jiné vzor; resp. jsou „v nekonečnu“:



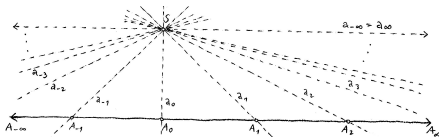
... to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor **rozšíříme**:

Eukleidovský prostor rozšířený o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* prostor.

Původní body jmenujeme *vlastní*, ty nové pak *nevlastní*.

Přesněji, body rozšířeného prostoru (A_i) ztotožňujeme s přímkami (a_i) procházejícími nějakým externím bodem (S):



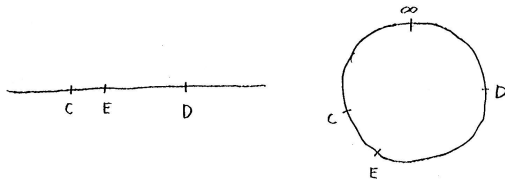
Vlastní body odpovídají různoběžkám, nevlastní body rovnoběžkám s původním (nerozšířeným) prostorem.

Tedy:

- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má **právě jeden** nevlastní bod,
- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má přímku nevlastních bodů.
- ▶ Každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají.⁷⁷
- ▶ Atd.

⁷⁷Rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě, různoběžky ve vlastním.

- ▶ Projektivní přímka je uzavřená.
- ▶ Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.⁷⁸
- ▶ Uspořádání bodů na projektivní přímce nemá valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

⁷⁸Vzpomeňte na diskuzi kolem věty o vnějším úhlu v trojúhelníku (s. 11).

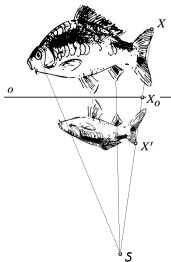
Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o , bodem S a nenulovým reálným číslem m .⁷⁹

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA , a to tak, že

$$(A' A A_0 S) = m,$$

kde A_0 = průsečík AA' s osou o a $(A' A A_0 S)$ = dvojpoměr.

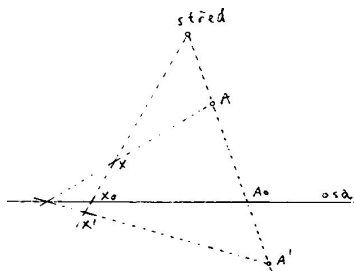


Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů,
základní projektivní transformace v rovině, ...

⁷⁹tzv. osa, střed a modul

Osová kolineace zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



Důkaz.

Plyne z definice a z Pappovy věty...



Osová kolineace s osou o , středem S a modulem m :

- (d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když $p = o$ nebo $p \ni S$,
- (e) je involutivní, právě když $m = -1$.

Poznámky

- (f) nemá smysl (globálně) řešit zda je přímé/nepřímé,
- (g) nemá smysl (globálně) řešit změny obsahů.

Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) z předchozí strany.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

Poznámky

Základní vlastnosti (a) a (b) nejsou zcela nezávislé.

Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) implikuje (b)...⁸⁰

Pokud projektivní zobrazení zobrazuje všechny (ne)vlastní body na (ne)vlastní, potom je afinní.

⁸⁰... viz základní větu projektivní geometrie a její důsledky (za rok)!

Analogicky k předchozím případům máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše tří osových kolineací.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci stále větší. . .



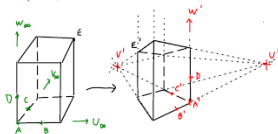
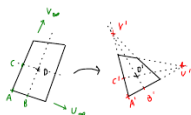
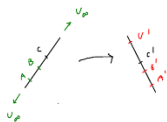
. . . také proto je osová kolineace základní kolineací v rovině.

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b),

- ▶ tj. obrazy tří různých bodů,
- ▶ tedy např. obrazy dvou různých vlastních bodů a jedním úběžníkem...

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- ▶ obrazy čtyř bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- ▶ nebo obrazy tří vlastních bodů v obecné poloze a dvěma odpovídajícími úběžníky...



Věta

Prostě⁸¹ projektivní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy $n + 1$ vlastních bodů v obecné poloze a n odpovídajícími úběžníky.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí úběžníků a přenášení dvojpoměrů... □

⁸¹ resp. „ne příliš degenerované“, viz dále...

Každé afinní zobrazení je projektivní.

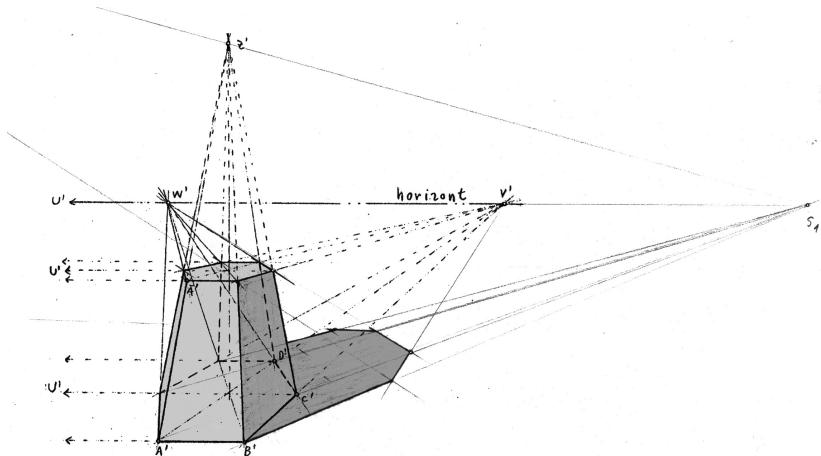
Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je afinní.

3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s rovinou pevných bodů. . .

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je
středové promítání do roviny. . .

Obecné projektivní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ **nemusí** být prosté (injektivní).



Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín.⁸²

⁸²Na obrázku můžeme vidět několik známých korespondencí: osová kolineace, osová kolineace, osová kolineace, ...

Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo⁸³

- ▶ *osu* = přímku pevných bodů,
- ▶ *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je pevná.

Osa nebo střed mohou být vlastní nebo nevlastní (s. 141).

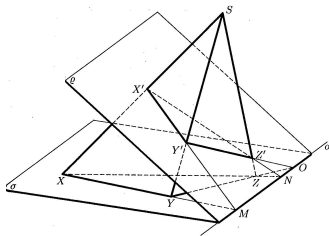
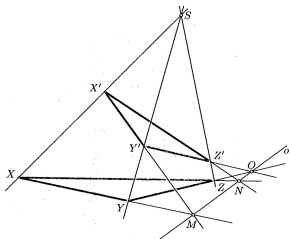
Z Desarguesovy věty vyplývá, že

- ▶ *projektivní transformace v rovině má osu* \iff *má střed*.

⁸³<https://ggbm.at/az7e9qsC>

Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí:
 přímky XX' , YY' , ZZ' prochází jedním bodem \iff průsečíky přímek XY
 a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(středové promítání do přímky) projektivní elace harmonická souměrnost osová kolineace
nevlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(rovnoběžné promítání do přímky) elace šikmá, resp. osová souměrnost osová afinita
vlastní	nevlastní	ne ne ne ne	0 1 -1 jinak	(promítání do bodu) identita středová souměrnost stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

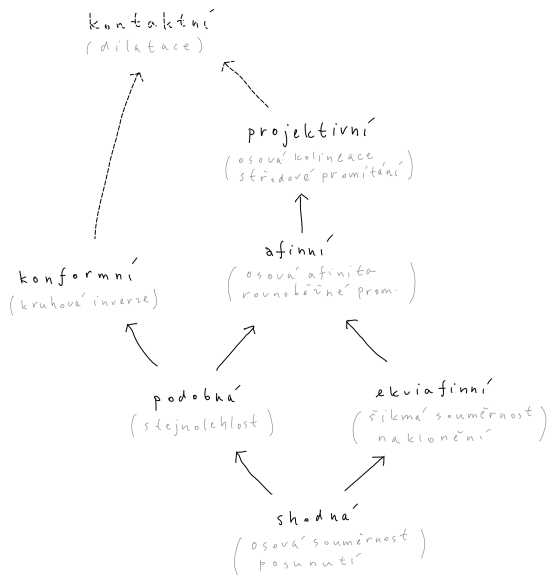
Transformace je involutivní \iff modul = -1.

Degenerované případy \iff modul = 0.

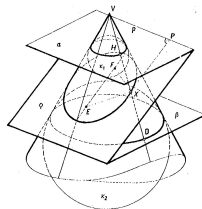
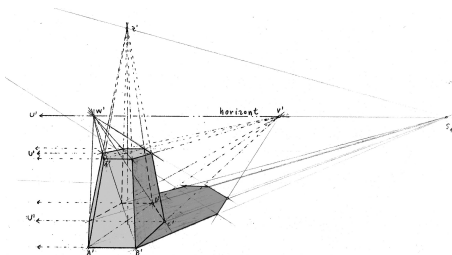
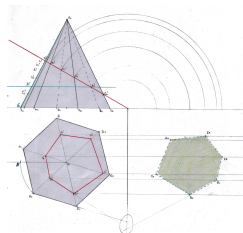
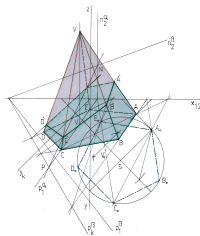
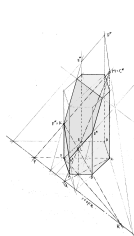
Pro afinní transformace: přímá \iff modul > 0, nepřímá \iff modul < 0.

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	-	-	+	-	-	-
afinní	+	-	+	+	+	-	-
ekviafinní	+	-	+	+	+	+	-
podobná	+	-	+	+	+	-	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	-	-	-	-	-	-	+

- ▶ Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.
- ▶ Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.
- ▶ Konformní zobrazení, které je projektivní, je podobné.
- ▶ Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.



Mnoho základních zobrazení můžeme (resp. musíme) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů:



Základy	4
Dotykové úlohy	77
Geometrická zobrazení	90
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Volně	161
Vázaně	164
Analyticky	167
Exoticky	169
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

Podle způsobu promítání dělíme na:

- ▶ středové,
- ▶ rovnoběžné,
- ▶ exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- ▶ volné,⁸⁴
- ▶ vázané,⁸⁵
- ▶ vychytané,⁸⁶
- ▶ analytické,⁸⁷
- ▶ exotické.

⁸⁴... takto jsme to dělali dosud,

⁸⁵za chvíli,

⁸⁶za chvíli,

⁸⁷takto budeme dělat příští rok...

Středové promítání (projekce) je modelové *projektivní* zobrazení:

- (i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.⁸⁸

Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání je *afinní* zobrazení, navíc tedy

- (iii) zachovává rovnoběžnost přímk,
- (iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.⁸⁹

⁸⁸... kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé)

⁸⁹... kdykoli to dává smysl...

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

Věta

„Nepříliš degenerované“

(a) *afinní,*

(b) *projektivní*

zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy

(a) $n + 1$ *bodů v obecné poloze,*

(b) $n + 1$ *bodů v obecné poloze a n odpovídajícími úběžníky.*

Základní konstrukce jsou:

(a) *rovnoběžky a přenášení poměrů,*

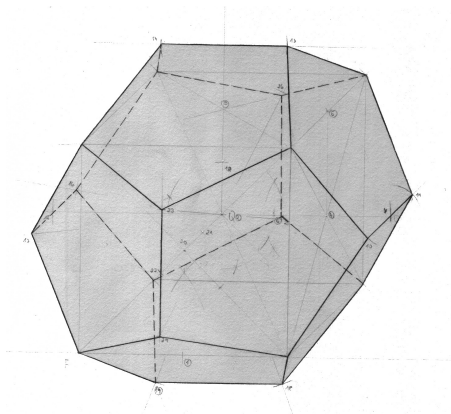
(b) *úběžníky a přenášení dvojpoměrů.*

Poznámka

V předpokladu věty tušíme jistý zádrhel:

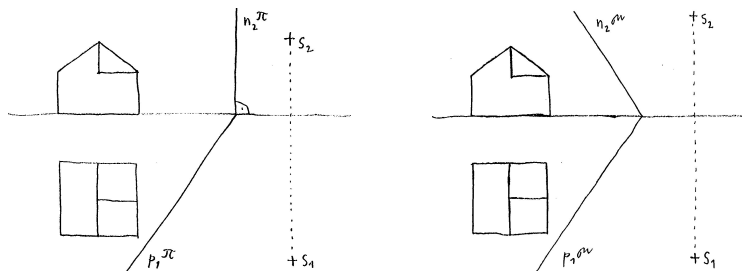
Jak sestavit obraz bodu v „souřadné rovině“, která se zobrazuje do přímky?

... pomocí vepsané krychle (podle s. 74):



Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými *sduženými* průměty (nárýs, půdorys):

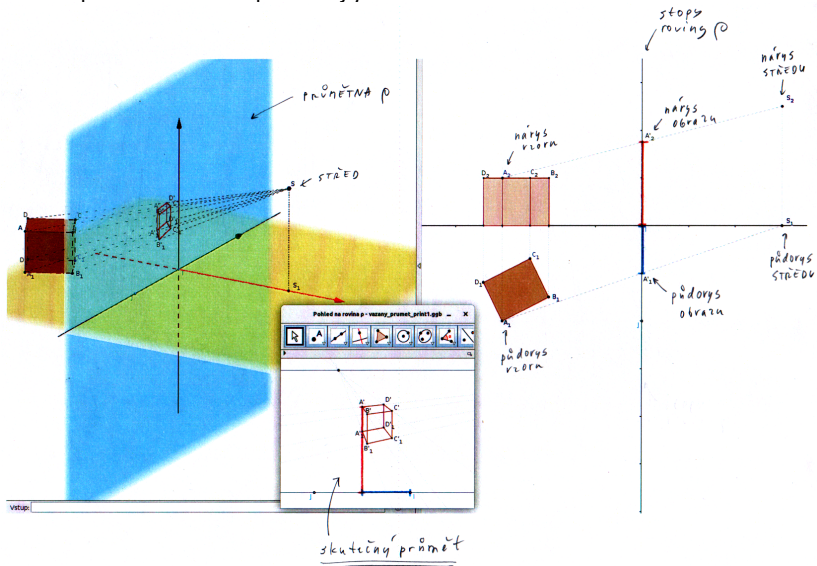


Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady!

Základní konstrukční dovednosti jsou:

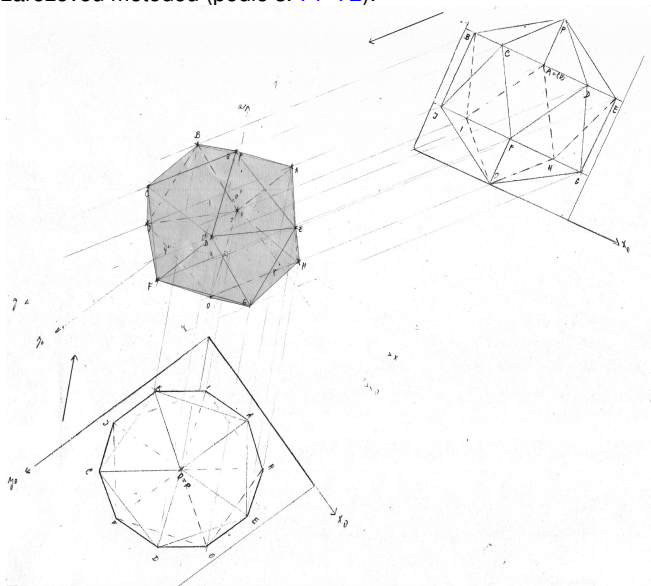
- ▶ průnik přímky a roviny,
- ▶ odměřování a přenášení vzdáleností. . .

... do speciálně zvolené průmětny ρ :

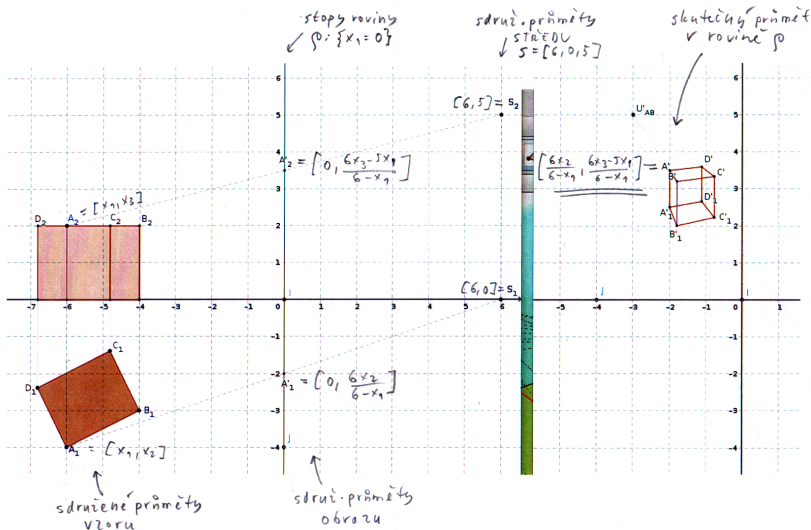


Vychytaný průmět pravidelného dvacetistěnu

... tzv. zářezovou metodou (podle s. 71–72):



... vzhledem k naznačené souřadné soustavě:



Středové promítání ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$

- ▶ v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3-5x_1}{6-x_1} \right],$$

- ▶ v *homogenních* (rozšířených) souřadnicích:

$$(\underline{x}_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\underline{6x_0 - x_1} : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

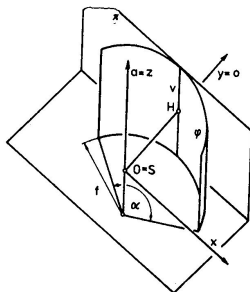
Všechno v jedné matici!

Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... viz základní větu projektivní geometrie (za rok)!

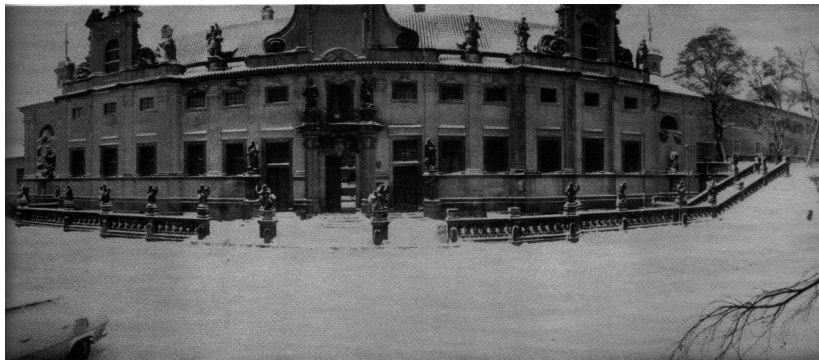
Dosud jsme uvažovali toliko projektivní zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- ▶ středového promítání na válcovou plochu
- ▶ a rozvinutí této plochy do roviny.



Některé přímky se zobrazují jako přímky, většina však ne...

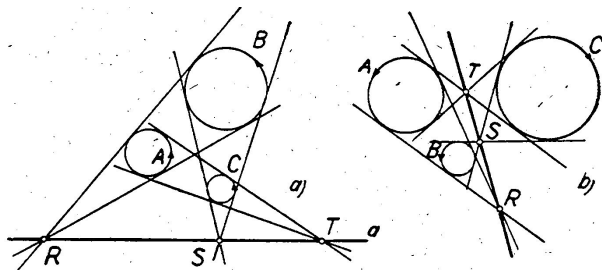
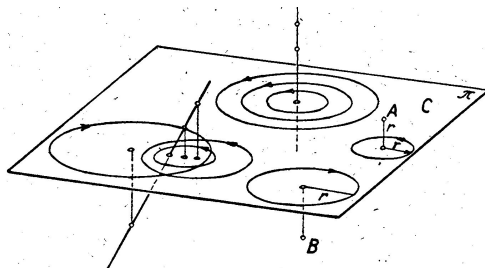
Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

- ▶ souřadnicemi $A = [x_1, x_2, x_3]$,
- ▶ sdruženými průměty, tj. půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a nárysem $A_2 = [x_1, x_3]$,
- ▶ volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.⁹¹

Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

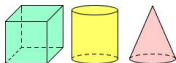
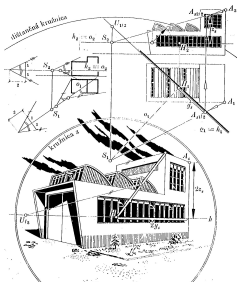
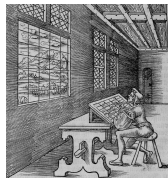
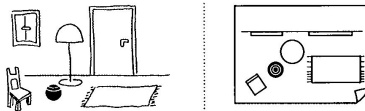
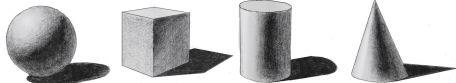
- ▶ půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a kótou (= souřadnicí x_3) \rightsquigarrow mapy,
- ▶ půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|x_3|$ a orientací podle znaménka x_3) \rightsquigarrow cyklografie...

⁹¹vrchol hranolu apod.



⁹²Co nám tohle jenom připomíná a k čemu by to mohlo být dobré?

Se zobrazováním prostoru do roviny mohou — ale nemusí — být problémy:



Základy	4
Dotykové úlohy	77
Geometrická zobrazení	90
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Klasická konstrukční geometrie	175
Zobrazení	177
Zdroje	179

Úvod (s. 5–8)

- ▶ primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- ▶ axiómy vyslovené, nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

Planimetrie (s. 9–63)

- ▶ základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- ▶ důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Eukl. věty o odvěsně/výšce)
- ▶ geometrická algebra (zlatý řez apod.)
- ▶ o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- ▶ pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, ...)
- ▶ teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

Sestrojitelné veličiny (s. 25–30)

- ▶ úplná charakterizace (+ - · : $\sqrt{\quad}$)
- ▶ slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

Stereometrie (s. 64–75)

- ▶ rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- ▶ analogie, resp. rozdíly k 2D (rovnoběžnostěny, resp. jehlany)
- ▶ pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20)

Dotykové úlohy (s. 78–88)

- ▶ základní úlohy (tečny)
- ▶ základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnoolehlost, dilatace)
- ▶ základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

Užitek (s. 19, 38, 49, 76, 89)

- ▶ kvadratura mnohoúhelníku
- ▶ kvadratické rovnice a jejich řešení
- ▶ pravidelný 5úhelník apod.
- ▶ specifické dotykové úlohy
- ▶ celkový přehled

Taxonomie

- ▶ hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní) (s. 108–151)
- ▶ další typy (konformní, kontaktní) (s. 93–107)
- ▶ příklady, obecné vlastnosti a hierarchie (s. 153–157)

Obecný rámec (s. 131–151)

- ▶ projektivní rozšíření
- ▶ Pappova věta
- ▶ věta o určenosti

Základní příklady (s. 155, 161)

- ▶ regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- ▶ singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

Zobrazování prostoru do roviny (s. 160–172)

- ▶ podle promítání: středové (\implies projektivní), rovnoběžné (\implies afinní)
- ▶ podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina), ...
- ▶ základní úlohy (přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů)
- ▶ vychytávky (otočení roviny, zářezová metoda apod.)

Užitek (s. 102–107, 130, 158, 173)

- ▶ obecná Apollóniova úloha
- ▶ obecné průměty pravidelných a jiných těles
- ▶ řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti
- ▶ celkový přehled

Základy	4
Dotykové úlohy	77
Geometrická zobrazení	90
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [DV] L. Drs, J. Všetečka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [EB] *The Elements of Euclid*, obrázkové vydání od O. Byrneho, 1847,⁹³
- [EJ] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heath, 1908–1998,⁹⁴
- [EV] *Eukleidés, Základy*, české vydání podle překladu F. Servíta, 1907–2012,⁹⁵
- [H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996
- [M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962
- [P] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954

⁹³<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>

⁹⁴<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

⁹⁵https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides_Servit.pdf

[A], 1, 6, 9, 10, 22–24, 29, 32–35, 37, 39, 41, 53–55, 62, 66, 71–74, 116

[DV], 169, 170

[EB], 11–14, 17, 18, 46, 52, 56

[EJ], 31, 51, 58–60, 64, 78, 81

[EV], 15, 16

[H], 28, 40, 43, 48, 93, 95–99

[K], 89, 117, 122, 158

[M], 173

[P], 38

Escher, M.C., 113

Fryštáková, M., 49

Kutuzov, B.V., 172

Mišejková, B., 166

Němcová, Ž., 158

Nedvěďová, K., 19

Penrose, R., 142

Pokorný, A., 113

Sekora, O., 109

Vachutková, T., 163

Velebová, I., 158

<http://caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/>, 75

<http://divisbyzero.com/>, 49

<http://en.wikipedia.org/>, 173

<http://etc.usf.edu/clipart/>, 30, 65, 79

<http://mathworld.wolfram.com/>, 86

<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/>, 173

<http://thedisorderofthings.files.wordpress.com/>, 173

<http://wellcomecollection.org/>, 173

<http://wikipedia.org/>, 57, 70

<http://www.daviddarling.info/encyclopedia/>, 121

<http://www.myddoa.com/feast-of-herod-donatello/>, 173