

MA 0008 – teorie psti

přednáška 01:

definice psti, popisná statistika

Co je pravda?

Co je pravda?

- Skutečnost ($2+2=4$)
- Věrný-přesný popis skutečnosti (první den napršelo 0,5 mm srážek, druhý den 0,3 mm, třetí den 0 mm, čtvrtý den 0 mm, pátý den 1,2 mm)

S pravdou může pomoci i logika:

Vše je relativní

S pravdou může pomoci i logika:

Vše je relativní ... je relativní

(obecně řečeno: výroky, které logicky či morálně vyvrací samy sebe, pravdivé nejsou)

Agnosticismus:

Pravdu nelze poznat

Agnosticismus

Pravdu nelze poznat ... přece nelze poznat!!

(výrok opět vyvrací sám sebe)

Skepticismus:

O všem musíme pochybovat

Skepticismus:

Musíme pochybovat o tom, že ...

O všem musíme pochybovat

(výrok opět vyvrací sám sebe)

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní ... je trochu netolerantní

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní ... je trochu netolerantní

- neusiluje o to nejlepší pro druhého
(lhostejnost ... ať si dělá, co chce)
- odmítá přijmout pravdu, pokud ji řekne někdo druhý

(jsme vůči sobě tolerantní, nebo lhostejní??)

Jak souvisí pravda a pravděpodobnost?

Často přesnou pravdu neznáme, ale musíme se nějak rozhodnout i v situacích, kdy dochází k řadě věcí, které mohou nastat, ale taky nemusí

Úkolem matematiky v těchto situacích je *popsat náhodnost*

Pst – statistická definice

Pst náhodného jevu A = takové reálné číslo, ke kterému se blíží relativní četnost výskytu jevu A , pokud celý experiment n -krát opakujeme, pro dostatečně velké n :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Slabina definice: přesnou hodnotu limity vlastně nelze ověřit, protože experiment nelze opakovat nekonečněkrát

Statistická definice psti - příklad

Jaká je pst, že při hodu kostkou padne 6?

$$N=10 \text{ hodů} \dots P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$N=100 \text{ hodů} \dots P(A) = \frac{20}{100} = 0,20$$

○

$$N=1000 \text{ hodů} \dots P(A) = \frac{170}{1000} = 0,170$$

V limitě bychom dostali $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = \dots$ pst se blíží 0,1666

Axiomatická definice psti:

Ω ... základní prostor = množina všech možných elementárních výsledků ω_i daného pokusu (experimentu)

\mathcal{A} ... jevové pole = množina všech náhodných jevů $A_i \subseteq \Omega$, které chceme uvažovat (nemusí to být nutně všechny podmnožiny množiny Ω) a přitom platí axiomy

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;

2. Pro $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$

(\mathcal{A} je uzavřené na rozdíly jevů)

3. Pro $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ také $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

(\mathcal{A} je uzavřené na sjednocení nekonečně mnoha jevů)

A nyní pst je zobrazení jevového pole \mathcal{A} do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s vlastnostmi

- 1. $P(\Omega)=1$... axiom normovanosti**
- 2. $P(A) \geq 0$ pro každý jev A ... axiom nezápornosti**
- 3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$... aditivita při neslučitelných jevech**
 - (axiom součtu pravděpodobností konečně mnoha nebo nekonečně mnoha neslučitelných jevů)**

Tato definice umožňuje korektně definovat všechny různé pstní modely

Vysvětlení třetího axiomu:

Př: experiment = hod kostkou, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

A ... padne sudé číslo ... $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

- Jednotlivé elementární výsledky $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ jsou navzájem neslučitelné, tj. je rozumné počítat $P(A)$ jako součet jednotlivých P stí daných neslučitelných jevů:

$$P(A) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_6)$$

princip součtu psí neslučitelných jevů platí nejen pro elementární jevy:

Pokud A_1, A_2, A_3, A_4 jsou po dvou disjunktí náhodné jevy (= neslučitelné náhodné jevy) a každý z nich může obsahovat i více elementárních výsledků,

Tak psí jejich sjednocení vypočteme jako součet psí těchto jevů:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$

Atd. A teoreticky tento princip platí i pro sjednocení nekonečně mnoha navzájem neslučitelných jevů.

Ze tří axiomů psiti lze odvodit další vlastnosti:

Větička 1: Pokud $A \subseteq B$, tak $P(A) \leq P(B)$

- **Důkaz: množinu B lze rozdělit na dvě disjunktí části A , $B-A$;
Tedy na základě axiomu 3 platí $P(B) = P(A) + P(B-A)$, a to je $\geq P(A)$, protože podle axiomu 2 je $P(B-A) \geq 0$.**

Anebo:

Větička 2: Pro každý jev A platí $P(A)+P(\bar{A})=1$

- **Důkaz: množinu Ω lze rozdělit na dvě disjunktní části A, \bar{A} ;
Tedy na základě axiomů 1 a 3 platí $P(\Omega)=1=P(A)+P(\bar{A})$.**

Důsledek: $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Popisná statistika:

Projdeme zhruba z učebnice

Robová, Hála, Calda: Matematika pro SŠ – Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost, statistika: str. 148-194, mimo str. 180-182 Statistika se týká 4.část učebnice

(v podobném rozsahu se statistika učí i na ZŠ, ale nezmiňuje se rozptyl)

Vše z popisné statistiky lze vyjádřit v jazyku R, který je nepovinný:

Průměr aritmetický, geometrický, harmonický: viz cvičení 1

Další věci: viz cvičení 2

Rekapitulace otázek (některé odpovědi ještě viz cvičení 1 a 2):

1. Výběrové šetření a druhy statistických znaků
2. Různé výpočty průměru
3. Popisná statistika – četnosti (relativní, kumulativní, relativní kumulativní) a kvantily, medián a modus. Intervalové rozdělení četností
4. Popisná statistika – míry variability: rozptyl a směrodatná odchylka, variační rozpětí, mezikvartilové rozpětí, variační koeficient
5. Statistická definice psti
6. Axiomatická definice psti