přednáška 09:
normální rozdělení psti

Literatura v IS:

Podrobněji viz vznikající text MA0008, přednáška 09.

U normálního rozdělení:

iii) P(X∈(a;b>) = F(b)-F(a)= $\int_a^b f(x)dx$ ... pro spojitou veličinu

($f(x)$ je hustota psti)

Příklad: Náhodná veličina X měří výšku stromů v daném lese. Má normální rozdělení EX= 50 m, DX= 25.

Příklad: Náhodná veličina X měří výšku stromů v daném lese. Má normální rozdělení EX= 50 m, DX= 25.

Vypočtěte

a) $P(X>60)$
b) $P(X\in (40;50))$
c) $P(X\leq 45)$

1) Nejjednodušší řešení: pomocí jazyka R

Vypočtěte

a) $P(X>60)$ .... >1-F(60)=1-pnorm(60,mean=50,sd=5)

b) $P(X\in\langle 40;50\rangle)$.. >F(50)-F(40)=
pnorm(50,mean=50,sd=5) - pnorm(40,mean=50,sd=5)

c) $P(X\leq 45)$ .... >F(45)=pnorm(45,mean=50,sd=5)

2) Převodem No (50,5) na normované normální rozdělení No(0;1):

Věta: $X \sim No\,(\mu,\sigma^2) \Rightarrow$ veličina $U := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim No\,(0;1)$

Označme Φ … distribuční funkci veličiny $U \sim No\,(0;1)$

Postup výpočtu:

1) převedeme X-hodnotu na U-hodnotu $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$
2) $P(X<c)=F(c)= P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma})= \Phi\,(\frac{c-\mu}{\sigma})$ … a hodnoty funkce Φ najdeme v tabulce.

2) Převodem No (50,5) na normované normální rozdělení No(0;1):

Vypočtěte

a) $P(\frac{X-50}{5} > \frac{60-50}{5}) = P(U > \frac{60-50}{5}) = 1 - \Phi(\frac{60-50}{5}) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,977 = 0,023$

b) $P(X \in (40;50)) = P(40 < X < 50) = P(\frac{40-50}{5} < \frac{X-50}{5} < \frac{50-50}{5}) = P(-2 < U < 0) =$
$\Phi(0) - \Phi(-2) = 0,5 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) - 0,5 = 0,977 - 0,500 = 0,477$

c) $P(X \leq 45) = P(\frac{X-50}{5} < \frac{45-50}{5}) = P(U < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,841 = 0,159$

B. Centrální limitní věta

Jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jsou navzájem nezávislé veličiny, které mají všechny stejné rozdělení psti

(nemusí být normální, ale libovolné, jeho střední hodnota je $E(X_i)=\mu$, rozptyl $D(X_i)=\sigma^2$),

Pak součtem těchto veličin je náhodná veličina $Y=\sum_1^N X_i$ se střední hodnotou $EY= N\cdot \mu$ a rozptylem $DY= N\cdot \sigma^2$, která má pro dostatečně velké N (N> 30) normální rozdělení

Důsledky:

1) Řadu náhodných veličin lze popsat normální rozdělením, protože je lze chápat jakou součet zhruba stejně velkých náhodných vlivů

Př: a) výška stromu v lese

b) Výsledek u zkoušky

Důsledky:

2) Binomické rozdělení lze dobře aproximovat normálním rozdělením

Bi(N,p) je vlastně součtem N alternativních rozdělení Alt(p), tj. rozdělení, která jsou všechna stejná, mají stejnou střední hodnotu p a stejný rozptyl p(1-p)

Tedy Bi(N,p) lze dobře aproximovat normálním rozdělením se střední hodnotou EY= N$\cdot p$ a rozptylem DY= N$\cdot p(1-p)$

Příklad:

Firma vyrábí balíčky ořechů po 200 ks, přičemž přibližně ¾ objemu ořechů jsou burské ¼ objemu jsou lískové ořechy. Tyto ořechy se dokonale promíchají, a pak teprve se sypou do balíčků.

Jestliže koupíme jeden balíček ořechů, jaká je pst, že počet lískových ořechů v něm je v intervalu <47; 56> ?

výpočet:

a) *Pomocí Bi (200, 1/4) …………... = 0,5684522*
b) *Pomocí No (200, 1/4) ………….. = 0,524*
c) *Pomocí No (200, 1/4) s korekcí.. = 0,571942*

Důvody pro korekci: a) Bi(4,1/2) … p(1)+p(2)= 0,625

Tento příklad je celý spočítán třemi způsoby v textu MA008, v závěru přednášky 9.

Důvody pro korekci: b) No(4,1/2) … $\int_1^2 f = 0{,}341$ … chyba 30 %

Důvody pro korekci: c) No(4,1/2) … $\int_{0,5}^{2,5} f = 0{,}624$ … chyba 0,1 %