Kapitola 1

Polynomy

S polynomy či česky mnohočleny se setkáváme již od dětství. Obyčejná přímá úměrnost se dá vyjádřit vzorcem $y = kx$, kde $x \in \mathbb{R}$ je nezávisle proměnná, $y \in \mathbb{R}$ je závisle proměnná a $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ je konstanta. Rovnice přímky ve směrnicovém tvaru je $y = kx + q$. Můžeme se na to podívat i z jiné strany, totiž, že rovnice $y = kx + q$ představuje jistou funkci, jejímž grafem je přímka, po latinsku *linea*, proto tuto funkci pokřtíme jménem *funkce lineární*. Později jsme poznali i funkci kvadratickou, která je definována vztahem $y = ax^2 + bx + c$, přičemž $a \neq 0$. Jen pro pořádek dodávám, že grafem kvadratické funkce je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou y. Zopakovali jsme si to co známe z předchozích kurzů a nyní začneme zobecňovat.

Def. 1.1 *Polynom stupně n je dán vzorcem*

$$P_n(x) : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je (nezávisle) proměnná, $a_i \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty, opět klademe podmínku $a_n \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je stupeň polynomu.

Poznámka 1.1 *Tato definice může být rozšířena i na čísla komplexní, a to jak pro koeficienty, tak pro proměnnou. My však budeme uvažovat jen polynomy reálné.*

Poznámka 1.2 *V mnoha učebnicích se můžeme setkat i s označením jdoucí do protivky, tedy $a_0 x^n + \ldots + a_n$.*

Operace s polynomy máte zažité již od základní školy, připomenu proto jen dělení.

Věta 1.1 *Nechť jsou dány polynomy $P_m(x)$ a $O_n(x)$, $m \geq n$. Pak existují polynomy $Q_q(x)$ a $R_r(x)$ takové, že platí*

$$P_m(x) = Q_q(x) O_n(x) + R_r(x)$$

Polynomy $Q_q(x)$ a $R_r(x)$ jsou určeny jednoznačně.

Poznámka 1.3 *Polynom $R_r(x)$ může být roven nule (nulovému polynomu).*

Poznámka 1.4 *Pokud někdo namítá, že jsem opsal větu o dělení celých čísel, tak má samozřejmě pravdu. Proto ponecháme i názvosloví, zejména $Q_q(x)$ nazveme podíl a $R_r(x)$ zbytek.*

Nyní přistoupíme k definici pojmu *kořen polynomu.*

Def. 1.2 *Řekneme, že číslo $x = c$ je kořenem polynomu $P(x)$, jestliže platí $P(c) = 0$.*

Hledat kořeny polynomu znamená řešit rovnici

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Takovéto rovnici říkáme *algebraická* a x nazýváme *neznámou.* Již vidím, jak si mnete ruce, jelikož si myslíte, jak snadný život vás v tomto kurzu čeká, musím však vaše nadšení zchladit. Hledání kořenů je obecně velmi nesnadné a mnohdy ani k cíli nevede. Nejdříve rozhodneme, zda vůbec kořeny existují. Zde uděláme jednu výjimku a povolíme i komplexní čísla. Pak platí věta, která je též nazývána *základní věta algebry.*

Věta 1.2 *Každá algebraická rovnice má alespoň jeden kořen.*

A ještě jedna věta, která je známa jako věta Bezoutova.

Věta 1.3 *Dělíme-li polynom $P(x)$ dvojčlenem $x - c$, je zbytek roven $P(c)$.*

Vskutku, podle věty (1. 1) platí

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

Dosadíme-li $x = c$, jsme s důkazem hotovi. Navíc jako důsledek můžeme uvést následující větu.

Věta 1.4 *Číslo $x = c$ je kořenem polynomu $P(x)$ právě tehdy, když výraz $x - c$ dělí tento polynom beze zbytku.*

Dejme tomu, že jsme nějakým způsobem zjistili, že číslo $x = c_1$ je kořenem polynomu $P(x)$. Pak platí $P_n(x) = (x - c_1)Q_{n-1}(x)$. Podle základní věty algebry má polynomQ_{n-1} alespoň jeden kořen, dejme tomu c_2, platí tedy $Q_{n-1} = Q_{n-2}(x - c_2)$, či

$$P_n(x) = (x - c_1)(x - c_2)Q_{n-2}(x).$$

Tak budeme postupovat tak dlouho, až nalezneme všechny kořeny. Polynom $Q_{n-1}(x)$ může mít za kořen opět číslo x_1. V tom případě říkáme, že c_1 je dvojnásobný kořen polynomu $P_n(x)$.

Zbývá nám dořešit, jak je to s kořeny komplexními. Je-li $x = a + bi$ kořenem polynomu $P_n(x)$, je i číslo komplexně sdružené kořenem tohoto polynomu. Součin patřičných kořenových činitelů $(x - a - bi)(x - a + bi)$ je roven $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, tedy je to kvadratický trojčlen s reálnými koeficienty. Je tedy namístě uvést následující dvě věty. Ti, kteří ještě neslyšeli o komplexních číslech, nechť mají chvíli strpení, tento číselný obor bude zmíněn na konci kurzu.

Věta 1.5 *Každý polynom stupně n má právě n kořenů, bereme-li v úvahu jejich násobnost.*

Věta 1.6 *Každý polynom stupně n lze rozložit na součin polynomů stupně nejvýš dva. Tento rozklad je jednoznačný (až na pořadí činitelů).*

Kdo v poslední větě vidí paralelu se základní větou aritmetiky, má nejen dobrý zrak, ale také mu to myslí.

Nyní se zkusme podívat na problém z jiné stránky. Řekněme, že jsme objevili kořeny c_1 a c_2 kvadratické rovnice. Potom tato rovnice má tvar $(x-c_1)(x-c_2)=0$, což po úpravě dává $x^2+(-c_1-c_2)x+c_1c_2=0$. Použijeme-li standardní označení, obdržíme tzv. Vietovy vzorce

$$c_1+c_2=-p \quad c_1c_2=q.$$

Analogicky pro kubickou rovnici $x^3+px^2+qx+r=0$ lze odvodit vzorce

$$c_1+c_2+c_3=-p \quad c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3=q \quad c_1c_2c_3=-r.$$

Obdobné vzorce můžeme odvodit i pro rovnice vyšších stupňů. Tento poznatek můžeme využít pro případ, že koeficenty algebraické rovnice jsou celočíselné.

Věta 1.7 *Nechť v algebraické rovnici*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

platí $a_i \in \mathbb{Z}$ pro všechna $i=0,1,\ldots,n$ a nechť $x_0=\frac{p}{q}$ je kořenem této rovnice. Pak $p|a_0$ a $q|a_n$.

Užití této věty si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1.1 *Najděte kořeny polynomu x^3-3x^2-6x+8.*

Koeficienty tohoto polynomu jsou celočíslelné, proto jsou případné racionální kořeny jsou rovněž celočíselné (patřičná rovnice je totiž normovaná, kdy koeficient u nejvyšší mocniny je roven jedné) a navíc jsou to dělitelé čísla osm. V úvahu tedy připadají pouze čísla $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$. Snadno se přesvědčíme, že kořenem je číslo $x=1$. Platí $(x^3-3x^2-6x+8):(x-1)=x^2-2x-8$. Zbývá najít kořeny podílu, což znamená vyřešit kvadratickou rovnici $x^2-2x-8=0$, což je úkol snadný, zbývající kořeny jsou $x=-2$ a $x=4$. Můžeme též psát $x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x+2)(x-4)$.

Příklad 1.2 *Najděte kořeny polynomu $x^4+2x^3-2x^2-6x-3$.*

Snadno najdeme první kořen $x=-1$. Nyní musíme hledat kořeny polynomu x^3+x^2-3x-3. Je to vlastně nová úloha, ale ne zase tak docela. Pokud jsme některé kořeny u zadaného polynomu již vyloučili, nemohou být kořeny ani zde. Číslo $x=-1$ však kořenem být může, dopručuji jím začít a zjistíme, že se jedná o kořen dvojnásobný. Nový podíl je x^2-3 a zbývající kořeny jsou $\pm\sqrt{3}$. Patřičný rozklad je $x4+2x3-2x^2-6x-3=(x+1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Příklad 1.3 *Najděte kořeny polynomu* $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$.

Již osvědčeným způsobem zjistíme, že kořenem je $x = -3$. *Polynom* x^2+4 *reálné kořeny nemá, kořeny komplexní jsou* $x = \pm 2i$. *Patřičný rozklad je* $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x+3)(x^2+4)$.

Zdálo by se, že máme vystaráno, avšak pozor! Rovnice s celočíselnými koeficienty nemusí mít racionální kořen, jak nám ukazuje jednoduchý příklad polynomu $x^4 - 4x^2 - 5$, kdy ani jedno z podezřelých čísel $\pm 1, \pm 5$ kořenem polynomu není, ačkoliv tento polynom musí mít kořeny čtyři. V tomto případě se z toho ještě můžeme vylhat substitucí $y = x^2$, což vede na rovnici kvadratickou $y^2 - 4y - 5 = 0$ s kořeny $y_1 = -1$ a $y_2 = 5$ a po návratu k původní proměnné skutečně získáme čtyři kořeny $x_1 = i, x_2 = -i, x_3 = \sqrt{5}, x_4 = -\sqrt{5}$. Jen pro pořádek dodám i rozklad $x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2+1)(x^2 - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

Také se asi podivujete, proč neřešíme rovnice vyšších stupňů pomocí jednoduchých vzorců jako je tomu v případě kvadratické rovnice. Tady nás ovšem čeká velké zklamání.

Věta 1.8 *Algebraická rovnice stupně* $n > 4$ *není řešitelná pomocí koeficientů u neznámé (tzv. radikálů).*

Řešení rovnice lineární se bere už na základní škole, vzorce pro řešení rovnice kvadratické jsou rovněž notoricky známy. Řešení rovnice kubické je poměrně velice pracné, přesto se u ní zastavíme. Je-li dána rovnice $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, lze substitucí $x = y - \frac{a_1}{3}$ eliminovat kvadratický člen. Můžeme tedy uvažovat rovnice tvaru $x^3 + px + q = 0$, jejíž kořeny jsou dány vzorcem

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}} = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}.$$

Tyto vzorce nesou poněkud neprávem název Cardanovy.

Příklad 1.4 *Pomocí Cardanových vzorců řešte rovnici* $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Zde je $p = -6$ *a* $q = -9$. *Dosazením do vzorce máme* $R_1 = 1$ *a* $R_2 = 2$ *a máme kořen* $x_1 = 3$. *My víme, že polynom* $x^3 - 6x - 9$ *můžeme rozložit na součin* $(x-3)(x^2+3x+3)$. *Zbývající kořeny jsou tedy komplexně sdružené* $x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Samozřejmě že tyto kořeny umíme najít i pomocí vzorců. Jak se dozvíme v závěrečné kapitole, existují tři odmocniny z jedničky, a to* $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ *a* $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. *Zbývající dva kořeny jsou* $x_2 = \varepsilon_2\sqrt[3]{R_1} + \varepsilon_3\sqrt[3]{R_2}$ *a* $x_3 = \varepsilon_3\sqrt[3]{R_1} + \varepsilon_2\sqrt[3]{R_2}$.

Příklad 1.5 *Řešte rovnici* $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladě. Jenž ouha, dostali jsme $\sqrt{-\frac{108}{27}}$. *Tato rovnice by tedy neměla mít řešení, leč snadno se přesvědčíme, že* $x_1 = 2$ *a známým postupem nalezneme* $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$. *Tato záhada trápila matematiky již v 16. století a díky ní byla postupně vybudována teorie komplexních čísel.*

Jak již bylo řečeno ve větě (1.8), tak nelze vynalézt vzorec pro řešení rovnic vyššího stupně než čtyři. Přesto někdy potřebujeme znát alespoň přibližnou hodnotu kořene. Zatímco při výuce matematiky preferujeme malá celá čísla, v praxi je tomu spíše naopak a nalezení přibližné hodnoty kořene má svou cenu. Ukážeme si tudíž aspoň některé z metod jak toho dosíci.

První problém je tzv. separace kořenů, to jest nalezení intervalů, v nichž se nachází právě jeden kořen. Jednou z možností je tato:

Věta 1.9 *Nechť funkce je v intervalu $[a; b]$ ryze monotónní a nechť je $f(a)f(b) < 0$. Pak je v intervalu $[a; b]$ právě jeden kořen.*

Poznámka 1.5 *Tuto větu můžeme aplikovat i na jiné rovnice než algebraické, např. rovnice transcendentní.*

Omlouvám se, ale neumím v techu obrázky, tak alespoň slovně. Sestrojme v bodě $x = a$ tečnu ke grafu funkce $y = f(x)$. Tato tečna protne osu x v bodě $x = a_1$. Stanovíme funkční hodnotu $f(a_1)$ a v tomto bodě opět sestrojíme tečnu atd. Tak budeme pokračovat tak dlouho, až se k hledanému kořeni dostaneme s požadovanou přesností.

Nyní byste měli ocenit, že jsem trval na tom, abyste rovnici tečny a normály uměli sestrojit, takže víte, že tečna má rovnici

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Průsečík tečny s osou x najdeme tak, že položíme $y = 0$. Obdržíme

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

či obecně

$$a_n = a_{n-1}\frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}$$

Jelikož podle předpokladu je funkce $f(x)$ ryze monotónní, tak její první derivace nemůže být rovna nule. Pozornému čtenáři neunikne, že tímto postupem se také můžeme kořenu vzdalovat, vyřešme tedy problém, v kterém bodě začít.

Věta 1.10 *Nechť v intervalu [a;b] je $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$ a nechť je $f(a)f(b) < 0$. Pak je třeba vybrat ten koncový bod intervalu, v němž funkce a její druhá derivace mají stejná znaménka.*

Příklad 1.6 *Najděte kořen rovnice $x^5 - x - 0,2 = 0$ v intervalu $[1; 1,1]$*

Je $f(1) = -0,2$ a $f(1,1) = 0,31051$, kořen tam tedy je. Dále máme $f'(x) = 5x^4 - 1$ a $f''(x) = 20x^3$, jak první tak druhá derivace jsou kladné, startovat budeme tedy z bodu $a = 1,1$. Je $f'(1,1) = 6,3205$. Vypočítáme

$$a_1 = 1,1 - \frac{0,31051}{6,3205} = 1,051$$

Zkusíme ještě jeden krok, $f(1,051) = 0,0313$, $f'(1,051) = 5,1005$.

$$a_2 = 1,051 - \frac{0,0313}{5,1005} = 1,04487.$$

Takto postupujeme až dosáhneme požadované přesnosti.

Čiperové mezi vámi si všimnou, že díky tomu, že funkční hodnoty na koncích intervalu leží v opačných polorovinách vymezených osou x je můžeme propojit úsečkou, která protne osu x blíže kořene. Rovnice této přímky je

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Položme $y = 0$, pak obdržíme

$$x = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Tento působ výpočtu kořene se nazývá *regula falsi* a je obdobná lineární interpolaci při hledání v tabulkách, což je pro vás věc zcela neznámá.

Příklad 1.7 *Pustíme metodu regula falsi na rovnici z předchozího příkladu. Máme*

$$a_1 = 1 + \frac{0,1.0,2}{0,51051} = 1,039$$

a v druhém přiblížení

$$a_2 = 1,039 + \frac{0,012.0,0282}{0,0595} = 1,04469.$$

Nyní prosím ortodoxní matematiky, aby tento odstavec nečetli. Jelikož pro tuto metodu platí podmínka $f''(x) \neq 0$, je graf funkce vždy vypouklý. Zatímco Newtonovu metodu používáme tam, kde je graf vypouklý, metoda regula falsi se používá na straně opačné. Výsledky jdou tedy kořenu naproti z obou stran. Vrátíme-li se k předchozímu příkladu, tak za kořen můžeme považovat číslo $1,045$. Vskutku, dosadíme-li je do levé strany rovnice obdržíme $0,0012$, což je pro technickou praxi slušná hodnota.

Kapitola 2

Číselné obory

V této kapitole se stručně zmíníme o konstrukci číselných oborů. Zatím jsme zaváděli číselné obory pouze intuitivně, tedy například přirozená čísla jsme chápali jako počet prvků konečných množin. Kdo bude pokračovat v magisterském studiu, tak se dozví, že přirozená čísla jsou kardinální čísla konečných množin. My půjdeme trochu jinou cestou. Matematika je založena na třech pilířích—axiomy, definice a věty. Položme si tedy otázku, zda by bylo možné vybudovat množinu přirozených čísel pomocí axiomů. Tuto problematiku vyřešil italský matematik Giuseppe Peano. Jeho axiomy můžeme uvést v následujících bodech. Předtím však zavedeme pojem *následovník*, jakožto další prvek v lineárně uspořádané množině. Značit ho budeme a^+.

Nyní si můžeme uvést Peanovy axiomy.
1) Ke každému prvku $a \in \mathbb{N}$ existuje následovník $a+$
2) $1 \in \mathbb{N}$
3) Jednička není následovník žádného prvku
4) Jestliže platí $a = b$, pak platí i $a^+ = b^+$
5) Nechť $A \subset \mathbb{N}$, přičemž platí: i)$1 \in A$ a ii) Jestliže $a \in A$. pak i $a^+ \in A$. Potom $A = \mathbb{N}$.

Poslední axiom je axiom matematické indukce. Jeho použití si zopakujeme na jednoduchém příkladě.

Příklad 2.1 *Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

Jelikož tvrzení má platit pro všechna přirozená čísla, důkaz provedeme matematickou indukcí. Krok první spočívá v tom, že tvrzení dokážeme pro $n = 1$, což je snadné, neboť $2 = 1.2$. Nyní můžeme přijmout předpoklad

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$$

a pokusíme se dokázat, že za tohoto předpokladu platí

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$$

Použijeme-li předpoklad, lze dokazované tvrzení psát ve tvaru $k(k+1)+2(k+1) = (k + 1)(k + 2)$, čímž je důkaz ukončen. Spojením obou bodů lze říci, že platnost pro $n = 1$ indukuje platnost pro $n = 2$, platnost pro $n = 2$ indukuje platnost pro $n = 3$ atd.

Poznámka 2.1 *V literatuře se mnohdy vyskytuje první axiom ve tvaru* $0 \in \mathbb{N}$. *Důvod je nasnadě. Přidáním nuly do množiny* $\mathbb{N}$ *získáme neutrální prvek i pro operaci sčítání, zatímco bez nuly by byl neutrální prvek pouze pro operaci násobení.*

Zavedeme ještě základní aritmetické operace následujícím způsobem:
1)$a + b^+ = (a + b)^+$
2)$ab^+ = ab + a$
3)$a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}$ tak, že platí $a + c = b$.

Nyní bychom logicky měli přistoupit k vybudování množiny celých čísel, my však uděláme zdánlivou nelogičnost, budeme předpokládat, že celá čísla máme již k dispozici a zavedeme čísla racionální. Tento postup totiž znáte již ze základní školy. Tam se žáci seznamují s pojmem zlomek jakožto podílem dvou celých čísel, učí se zlomky sčítat a násobit a zjišťují, že různé zlomky mohou mít "stejnou hodnotu", např. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, neboť když naznačené dělení provedou, dojdou v obou případech k hodnotě $0,5$.

Nyní těmto poznatkům zkusíme dát trochu fazónu. Nechť $m = (a; b)$ a $n = (c; d)$, přičemž $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a $b, d \neq 0$ jsou uspořádaé dvojice celých čísel. Řekneme, že m je v relaci s n právě tehdy, když platí $ad = bc$. Snadno se přesvědčíme, že tato relace je ekvivalence. Tato relace vyvolá rozklad množiny všech uspořádaných dvojic celých čísel na nekonečně mnoho tříd ekvivalence, přičemž každá z těchto tříd představuje jedno racionální číslo. Že uspořádaná dvojice celých čísel představuje vlastně zlomek si snad uvědomuje každý. První složka představuje čitatel, druhá jmenovatel. Zbývá zavést operaci sčítání a násobení, tak vězte, že

$$(a; b) + (c; d) = (ad + bc; bd), \qquad (a; b) \cdot (c; d) = (ac; bd).$$

I v tomto jistě poznáváte sčítání a násobení zlomků, tak jak to znáte z dětství.

To je všechno hezké, jenže to plave na vodě, celá čísla vlastně neexistují. Co však, kdybychom tento trik použili na zkonstruování množiny $\mathbb{Z}$ pomocí prvků množiny $\mathbb{N}$? Jistě, nemohli bychom použít operaci násobení, ale pořád máme k dispozici sčítání. Tak to pro velký úspěch zopakujeme.

Nechť $m = (a; b)$ a $n = (c; d)$, přičemž $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ jsou uspořádaé dvojice přirozených čísel. Řekneme, že m je v relaci s n právě tehdy, když platí $a+d = b+c$. Snadno se přesvědčíme, že tato relace je ekvivalence. Tato relace vyvolá rozklad množiny všech uspořádaných dvojic přirozených čísel na nekonečně mnoho tříd ekvivalence, přičemž každá z těchto tříd představuje jedno celé číslo. Že uspořádaná dvojice celých čísel představuje vlastně rozdíl Například dvojice $(7; 2)$, $(14; 9)$ atd. představují celé číslo 5, prohodíme-li v nich pořadí, tak máme číslo -5. Zbývá zavést operaci sčítání a násobení, tak vězte, že

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d), \qquad (a; b) \cdot (c; d) = (ac + bd; ad + bc).$$

Tak nám to šlo jako po másle, ale teď je problém jak se dostat k číslům reálným. Tentokrát již nebudeme moci aplikovat tento postup, ale musíme zkusit něco jiného. Jedna možnost je využití cauchyovských posloupností racionálních čísel. Z analýzy víme, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní. Můžeme tedy zavést relaci mezi těmito posloupnostmi. Řekneme, že posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou v relaci právě tehdy, když mají stejnou limitu. Mohou nastat dva případy. Buďto v jisté třídě nalezneme konstatní posloupnost racionálních čísel, tato třída pak představuje ono racionální číslo. např. nalezneme-li v jisté třídě posloupnost $\{a_n = 6\}$, pak tato třída představuje racionální číslo šest. Nenajdeme-li tam takovou posloupnost, pak tato třída představuje číslo iracionální.

Druhou možnost navrhl německý matematik Richard Dedekind. ten si pořádně nabrousil nůž a číselnou osu prostě přeříznul. Množina racionálních čísel tímto řezem byla vlastně rozdělena na dvě disjunktní podmnožiny. Platí $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ a $x < y \forall x \in A, y \in B$. Dále hledal největší (nejmenší) prvek těchto podmnožin. Je vyloučeno, aby množina A měla největší prvek a množina B měla nejmenší prvek. další dva případy jsou identické, buď množina A má největší prvek a množina B nemá nejmenší prvek, nebo množina A nemá nejmenší prvek a množina B má nejmenší prvek. Zde jsme se v každém případě trefili do čísla racionálního. Poslední možnost je, že množina A nemá největší prvek a množina B nemá nejmenší prvek. Tento řez představuje číslo iracionální. netřeba v tom hledat žádná kouzla, to vlastně taky znáte z dětství. To je známé vyjádření iracionálního čísla pomocí čísel racionálních. Např. $3 < \pi < 4$, $3,1 < \pi < 3,2$, $3,14 < \pi < 3,15$, $3,141 < \pi < 3,142$ atd.

Závěrem uvedeme ještě definici řezu tak, jak je možné ji nalézt v literatuře.

Def. 2.1 *Dedekindův řez je každá dolní množina v lineárně uspořádané množině, která obsahuje své suprémum pokud existuje.*

Def. 2.2 *Řekneme, že funkce je v bodě x_0 spojitá, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje ryzí δ - okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nahradíme-li pojem ryzí δ okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o spojitosti zprava (zleva).

Podobně jako v případě limity spojitost kopíruje aritmetické operace.

Věta 2.1 *Nechť funkce f g jsou spojité v bodě x_0. Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a v případě $g(x_0) \neq 0$ i funkce $\frac{f}{g}$.*

Následující věta má význam pro počítání limit složených funkcí.

Věta 2.2 *Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \alpha$ a funkce f je spojitá v bodě α. Pak platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$.*

Funkce s nimiž pracujeme bývají obvykle definovány na jistém intervalu. Měli bychom se tedy zajímat, jak je to se spojitostí funkce na intervalu. začneme definicí.

Def. 2.3 *Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li levý (pravý) koncový bod do I, pak je zde spojitá zprava (zleva).*

Nyní uvedeme dvě věty, které jsou velmi důležité a pomáhají nám osvětlit pojem spojitosti. První věta je také známa jako věta Weierstrassova.

Věta 2.3 *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak je zde ohraničená a nabývá zde největší a nejmenší hodnoty.*

Druhá věta je pojmenována podle českého matematika a filozofa Bernarda Bolzana.

Věta 2.4 *Nechť funkce f je definována na uzavřeném intervalu I. Pak zde nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledkem této věty je toto tvrzení.

Věta 2.5 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$ a nechť platí $f(a)\cdot f(b) < 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a;b)$ takový, že platí $f(\xi) = 0$.*

Budeme běžně pracovat také s funkcemi inverzními, proto se nám hodí i tato věta.

Věta 2.6 *Nechť funkce f je ryze monotónní a spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$. Pak inverzní funkce je spojitá a ryze monotónní na intervalu $J = f(I)$.*

Závěrem se ještě podrobněji podíváme na body, v nichž je funkce nespojitá. Ten bod budeme označovat x_0. Rozlišujeme tři případy:
1) Existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. Tento případ nazveme *odstranitelná nespojitost* . Název je případný, neboť nespojitost lze snadno odstranit definováním nové funkce dle níže uvedeného vzoru.

$$g(x) = \begin{cases} a & x = x_0 \\ f(x) & x \in D(f) - \{x_0\} \end{cases}$$

Příkladem budiž již zmíněná funkce $y = \frac{\sin x}{x}$. Tato funkce není definována pro $x = 0$, leč $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tuto nespojitost lze odstranit dodefinováním

$$y = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} - 0 \end{cases}$$

2. Limita funkce sice neexistuje, ale existují obě jednostranné limity, jsou vlastní a různé. Tento případ nazveme *bod nespojitosti prvního druhu.* Příkladem budiž funkce definovaná následujícím způsobem.

$$y = \begin{cases} x - 1 & x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & x = 0 \\ x + 1 & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Limita neexistuje, jednostranné limity jsou rovny -1 resp. +1.
3. Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní. Tento případ nazveme *bod nespojitosti druhého druhu.* Příkladem budiž funkce $y = \frac{1}{x}$.

Kapitola 3

Derivace funkce

V motivačních úlohách, ať se již jednalo o určení okamžité rychlosti, rovnici tečny a další hrál klíčovou roli podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, jestliže jmenovatel byl prakticky roven nule. Jelikož jsme se již seznámili s pojmem limity, kterémuž dobře rozumíme, je nám jasné, že můžeme opustit čachry s Δx a definovat pojem derivace.

Def. 3.1 *Derivaci funkce v bodě x_0 nazveme limitu*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f(x)'$ resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Následující věta uvádí vztah mezi spojitostí a derivací.

Věta 3.1 *Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci (derivaci zprava, derivaci zleva). Pak je zde spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva).*

Musíme si uvědomit, že tato věta je implikace, nemusí tedy platit implikace obrácená. Jednoduchým příkladem je funkce $y = |x|$, která má derivaci zprava rovnu 1 a derivaci zleva rovnu -1, derivaci tedy nemá.

V další větě uvedeme postup pro derivaci součtu, součinu a podílu funkcí. Zatímco u součtu či rozdílu je to stejné jako u limity, v případě součinu resp. podílu funkcí je již situace složitější.

Věta 3.2 *1.* $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$
2. $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
3. $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Abychom nemuseli pořád psát u x index, nadefinujeme si derivaci na intervalu a pak již přistoupíme k některým vzorcům pro derivace elementárních funkcí.

Def. 3.2 *Řekneme, že funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Je-li interval na některé straně uzavřený, musí mít patřičnou jednostrannou derivaci.*

Nyní si uvedeme vzorce pro derivaci elementárních funkcí.

3.1. $(c)' = 0$

3.2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.3. $(\sin x)' = \cos x$

3.4. $(\cos x)' = -\sin x$

3.5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

3.6. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

3.7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3.8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

3.9. $(e^x)' = e^x$

3.10. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

3.11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

3.14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Bohužel, většina funkcí s nimiž budeme pracovat jsou funkce složené, musíme si tedy říci, jak se derivuje funkce složená.

Věta 3.3 *Nechť funkce $u = g(x)$má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Přidáme ještě větu o derivaci funkce složené.

Věta 3.4 *Nechť funkce $x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Nechť y_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má funkce f v bodě y_0 derivaci $f'(y_0)$. Pak má inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ v bodě $x_0 = f(y_0)$ rovněž derivaci.*
Je-li $f'(y_0) \neq 0$, je derivace inverzní funkce vlastní a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Je-li $f'(y_0) = 0$, je derivace funkce inverzní nevlastní a rovna $+\infty$ pro funkci rostoucí a $-\infty$ pro funkci klesající.

Derivace funkce na intervalu I je funkce, neboť každé hodnotě $x \in I$ přísluší právějedna hodnota y' . Tuto funkci můžeme opět derivovat, je tedy namístě následující definice.

Def. 3.3 *Druhou derivací funkce f rozumíme funkce $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme $n-$tou derivaci (derivaci $n-$tého řádu) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.*

Kapitola 4

Aplikace derivace

Důležitou úlohou nejen v matematice je nalezení tečny a normály ke grafu funkce v jistém bodě. Na základě toho, co jsme dosud probrali o derivaci a vzpomínek na analytickou geometrii můžeme formulovat následující větu.

Věta 4.1 *Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0; y_0]$ má tvar*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Rovnice normály má tvar

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$f'(x)$

Nyní se vrátíme k výpočtu limity neurčitých výrazů. Máme k dispozici poměrně účinný prostředek známý jako L´Hospitalovo (nemocniční) pravidlo.

Věta 4.2 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a je splněna jedna ze dvou následujících podmínek*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x_0)}$, pak existuje i $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x_0)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x_0)}$$

V následující částí se budeme věnovat průběhu funkce, čímž se míní nalezení důležitých údajů o fukci (definiční obor, obor hodnot, monotonie, extrémy, inflexní body, asymptoty). Z toho, co již víme o derivaci, můžeme formulovat následující větu.

Věta 4.3 *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak platí:*

4.1. Funkce f je neklesající na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I.

4.2. Funkce f je rostoucí na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.

Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.

Platnost této věty lze rozšířit na interval I libovolného typu. Stačí předpokládat, že f je spojitá na I a f' existuje uvnitř I. Věta platí i v případě, když f má někde nevlastní derivaci, pokud se předpokládá, že funkce f je spojitá. Z této věty snadno odvodíme postačující podmínku pro monotónii funkce.

Věta 4.4 *Nechť f má konečnou derivaci na otevřeném intervalu I. Je-li $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí (klesající) na I.*

Definujme lokální extrém.

Def. 4.1 *Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:*

- *lokální maximum, existuje-li okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,*
- *lokální minimum, existuje-li okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,*
- *ostré lokální maximum, existuje-li ryzí okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$,*
- *ostré lokální minimum, existuje-li ryzí okolí $O(x_0)$ tak, pro každé $x \in O(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$.*

Tvrzení předchozí věty nám dává návod, jak nalézt lokální extrémy.

Věta 4.5 *Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $O(x_0)$. Je-li pro všechna $x < x_0$ z tohoto okolí $f'(x) > 0$ a pro všechna $x > 0$ z tohoto okolí $f'(x) < 0$, pak má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Obdobné tvrzení platí i pro ostré lokální minimum, zobáčky jsou obrácené.*

Máme ještě jeden prostředek na nalezení lokálních extrémů.

Věta 4.6 *Nechť $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 osré lokální maximum. Je-li $f''(x_0) > 0$ má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Shrneme-li tyto dvě věty, máme souvislost mezi derivací a lokálními extrémy.

Věta 4.7 *Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť je v tomto bodě vlastní derivace. Pak je $f'(x_0) = 0$.*

Tuto větu jsem uvedl jen pro první a druhou derivaci, mohl jsem ji ovšem formulovat obecněji zhruba tímto způsobem. Je-li lichá derivace rovna nule a následující sudá je kladná (záporná), má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum (maximum). Praktického smyslu to však moc nemá, snad jen u jednodušších funkcí má smysl počítat dervace vyšších řádů.

Zatím jsme zdůrazňovali, že se jedná o extrémy lokální, tedy že se jedná o záležitost bodu x_0 a jeho blízkého okolí. Můžeme se také ptát, zda má funkce na nějaké množině největší či nejmenší hodnotu. Odpověď nalezneme v následující definici.

Def. 4.2 *Nechť funkce f je definována na množině M. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 absolutní (globální) maximum, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 absolutní (globální) minimum, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.*

Vykreslíme-li si graf nějaké funkce, pak většinou dojdeme k ladným křivkám. Definujeme

Def. 4.3 *Řekneme, že funkce f je konvexní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí*

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Řekneme, že funkce f je konkávní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

pokud nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostaneme definici pojmů ostré konvexnosti (konkávnosti) na intervalu I.

Zkusme si tuto krkolomnou definici rozklíčovat jak se teď říká hezky česky. Spojme body x_1 a x_3 přímkou. Ta bude mít rovnici

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Znamená to, že všechny body funkce jsou pod touto přímkou, graf funkce je vypouklý směrem dolů všude tam, kde je vypouklý.

Zajímat nás musí jak zjistíme tuto vlastnost grafu. Odpověď nám dá následující věta.

Věta 4.8 *Nechť funkce f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Funkce f je konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy když je funkce f' neklesající (rostoucí) na I. Funkce f je konkávní (ostře konkávní) na I právě tehdy když je funkce f' nerostoucí (klesající) na I.*

Uvědomíme-li si jak zkoumáme monotónii, tak můžeme formulovat tuto větu.

Věta 4.9 *Nechť I je otevřený interval a funkce f má na I vlastní derivaci.*
Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je funkce na I ostře konvexní.
Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je funkce na I ostře konkávní.

Uvedeme ještě jednu větu, která nám tyto pojmy více objasní.

Věta 4.10 *Nechť funkce f má vlastní derivaci na intervalu I. Pak je f konvexní (konkávní) na I právě tehdy, když pro každé dva různé body $x,\ x_0 \in I$ platí:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nahradíme-li ve výše uvedených rovnicíc $f(x)$ písmenem y a nerovnosti rovností, obdržíme rovnici tečny. Graf funkce konvexní je tedy nad tečnou, u funkce konkávní pak pod tečnou.

Tyto vlastnisti se mohou na nějakém intervalu střídat, ten bod, v němž tato změna nastane se nazývá bodem inflexním. Definujme si ho přesněji.

Def. 4.4 *Nechť f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. je-li tato derivace nevlastní, musí zde být navíc spojitá. řekneme, že x_0 je inflexním bodem funkce f, existuje-li δ-okolí bodu x_0 takové, že je funkce na intervalu $(x_0 - \delta; x_0)$ ryze konvexní a na intervalu $(x_0; x_0 + \delta)$ ryze konkávní nebo naopak.*

Abychom mohli nakreslit graf funkce, musíme se ještě seznámit s pojmem asymptota (tečna v nekonečnu).

Def. 4.5 *Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá asymptotou bez směrnice funkce f, jestliže má funkce v bodě x_0 alespoň jednu limitu nevlastní. Přímka $y = ax+b, a,\ b \in \mathbb{R}$ se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f, jestliže platí nebo $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.*

Problém, jak vypočítat koeficienty a, b řeší následující věta.

Věta 4.11 *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $f(x)$, je-li $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax)$. Analogickou větu můžeme zformulovat pro $x \to -\infty$.*

Nyní si ukážeme, jak asymptoty počítat.

Příklad 4.1 Najděte asymptoty ke grafu funkce $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, nemá tedy asymptoty bez směrnice. Podívejme se tedy, zda bude mít asymptoty se směrnicí. Nejdříve budeme hledat směrnici.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0.$$

Úsek na ose y určíme podle vzorce

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 0 \cdot x \right) = 1.$$

Ke stejnému výsledku bychom došli i pro $x \to -\infty$, přímka $y = 1$ je tudíž asymptotou se směrnicí.

Jiná situace nastane v následujícím příkladu.

Příklad 4.2 Určete asymptoty ke grafu funkce $y = xe^x$. I tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, proto nemá asymptoty bez směrnice. S asymptotami se směrnicí je to ale jiné. Je totiž rozdíl, počítáme-li limitu pro plus či mínus nekonečno. Zatímco $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^x}{x} = \infty$, je $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = 0$. Dopočítáme ještě $q = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}}$. Použitím L'Hopitalova pravidla snadno zjistíme, že se rovná nule a přímka $y = 0$ je asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$.

Závěrem této kapitoly si řekneme věty o střední hodnotě. První z nich je věta Rolleova.

Věta 4.12 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$. Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní) a nechť platí $f(a)=f(b)$. Pak existuje $c \in (a;c)$ takové, že je $f'(c)=0$.*

Zobecněním této věty je věta Lagrangeova.

Věta 4.13 *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a;b]$. Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní). Pak existuje $c \in (a;c)$ takové, že platí*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Se svou troškou do mlýna přišel i pan Cauchy.

Věta 4.14 *Nechť funkce f a g jsou definovány na intervalu $[a;b]$ a nechť v každém bodě $x \in (a;b)$ existují vlastní derivace $f')x)$, $g'(x)$. Pak existuje $c \in (a;b)$ tak, že platí*

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(x).$$

Kapitola 5

Přibližné vyjádření funkce

Na závěr si něco řekneme o přibližném vyjádření funkce. Problém spočívá v tom, že někdy je přesné vyjádření funkce dosti složité, přičemž v praxi bychom vystačili i s méně přesným, zato jednodušším vyjádřením funkce v okolí nějakého bodu. Budeme preferovat vyjádření pomocí polynomu, neboť tato funkce se mimo jiné snadno derivuje i integruje.

Def. 5.1 *Nechť funkce f je definována v okolí $O(x_0)$ bodu x_0 a platí $x_0 + h \in O(x_0)$. Pak číslo h nazýváme přírůstkem nezávisle proměnné a rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazýváme přírůstkem funkce f v bodě x_0 s krokem h nebo též přírůstkem závisle proměnné.*

Pokusíme se nyní vyjádřit přírůstek funkce v závislosti na čísle h. Jednu z možností udává následující definice.

Def. 5.2 *Řekneme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce, pro niž platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$.

Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, nazývá se výraz $A \cdot h$ diferenciál funkce f v bodě x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(h)$ či stručněji $\mathrm{d}f(x_0)$.

Nyní se pokusíme zjistit význam konstanty A. Pracujeme s funkcemi spojitými, které moho mít v bodě x_0 derivaci. Pokud tomu tak je, pak máme vyhráno, nebt byla dokázána následující věta.

Věta 5.1 *Funkce f má v bodě x_0 diferenciál právě tehdy, když existuje vlastní derivace $f'(x_0)$. Konstanta A z předchozí definice je dána vztahem $A = f'(x_0)$, je tedy*

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

Může se stát, že přibližné vyjádření funkce diferenciálem není dostatečně přesné. V tomto případě můžeme hledat vyjádření polynomem stupně n ve tvaru $P_n(x) = a_0 + A_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$. Je rozumné požadovat, aby platilo

$$\begin{array}{rcrcr} f(x_0) & = & P_n(x) & = & a_0 \\ f'(x_0) & = & P_n'(x) & = & a_1 \\ f''(x_0) & = & P_n''(x) & = & 2a_2 \\ & & \vdots & & \\ f^{(n)}(x_0) & = & P_n^{(n)}(x) & = & n!a_n \end{array}$$

Hledaný polynom má tvar

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = T_n(x)$$

Polynom $T_n(x)$ se nazývá Taylorův polynom se středem x_0. Pan Taylor, po němž je pojmenována následující věta, dokázal, že funkci $f(x)$ lze nahradit polynomem.

Věta 5.2 *Nechť funkce f má v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro některá $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí:*

$$f(x) = T_n(x_0) + R_n(x).$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo mezi x a x_0 je zbytek (chyba). Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom nazývá Maclaurinův.

Kapitola 6

Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme věnovat funkcím více proměnných. Kdo se dobře učil v minulém semestru, bude mít úlohu značně usnadněnou, neboť řada věcí je stejných či alespoň hodně podobných. Některé věci jsou však znčně odlišné, tak si na to dávejte pozor čili bacha. Budu se snažit na to upozorňovat. Na druhé straně vám to zjednoduším tím, že se budeme skoro výhradně bavit o funkci dvou proměnných.

6.1 Limita a spojitost

Def. 6.1 *Reálná funkce dvou reálných proměnných je zobrazení $M \to R$, kde $M \subseteq \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$. Jinými slovy každé uspořádané dvojici $[x; y] \in M$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$. Množina M se nazývá definiční obor, množina všech z, které jsou přiřazeny k nějaké uspořádané dvojici $[x; y]$ se nazývá obor hodnot funkce. Píšeme $z = f(x, y)$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit stručně o funkci dvou proměnných.*

Příklad 6.1 *Určete definiční obor funkce $z = \arcsin y + \ln(4 - x^2 - y^2)$. Budeme vycházet ze znalosti funkcí jedné proměnné a vzpomeneme si na definiční obory funkcí arkussinus a přirozený logaritmus. Obě mají jistá omezení, která musí platit současně, je tedy*

$$-1 \leq y \leq 1 \cap 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Zatímco první podmínce vyhoví pás mezi přímkami $y = -1$ a $y = 1$, druhé podmínce vyhoví všechny body uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem $r = 2$, v prvním případě včetně hranice. Definiční obor je samozřejmě průnik obou oblastí, leč obrázek zatím neumím.

Def. 6.2 *Grafem funkce dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde body $[x, y]$ patří do definičního oboru funkce. Jinými slovy je to plocha o rovnici $z = f(x, y)$. Vrstevnice je křivka o rovnici $f(x, y) = c$.*

Takovým nejběžnějším příkladem grafu funkce dvou proměnných je obyčejná plastická mapa. Proměnné představují zeměpisná šířka a délka, funkční hodnotu pak nadmořská výška. Patří sem i ona původně normální mapa, která se nacházela v kanceláři 91. pěšího pluku a kterou učinil plastickou až kocour chovaný písaři. Jen připomínám, že prvním, kdo se o této změně dotykem přesvědčil byl oberst Schröder a že to mělo pro písaře nepříjemné následky. Pojem vrstevnice je převzat z geografie a má stejný význam—zlepšit představu o grafu funkce v dvourozměrném modelu.

Uvedeme několik příkladů.

6.1. Z analytické geomtrie víte, že grafem funkce $z = ax + by + c$ je rovina v $\mathbb{R}_3$.

6.2. Grafem funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem $r = 3$ nad podstavnou rovinou os x a y.

6.3. Grafem funkce $z = x^2 + y^2$ je rotační paraboloid s vrcholem v počátku, jehož osou je osa z. Vrstevnice tvoří soustředné kružnice o rovnicích $x^2 + y^2 = c$.

Nyní přistoupíme k definici pojmů limita a spojitost. Začneme definicí okolí.

Def. 6.3 *Vzdálenost dvou bodů $A[x_1; y_1]$ a $B[x_2; y_2]$ rozumíme číslo*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vzdálenost bodů ve vícerozměrném prostoru si jistě odvodíte sami.

Def. 6.4 *δ-okolím bodu P nazýváme množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu P je menší než δ. Vyjmeme-li z této množiny samotný bod P, mluvíme o ryzím okolí.*

Def. 6.5 *Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro pro všechny body z ryzího δ okolí bodu M platí*

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Píšeme $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = L.$

Definice pojmu limity je po formální stránce stejná, její výpočet je však někdy notně komplikovaný, kolikrát spíše dokazujeme, že daná funkce limitu nemá. Uvidíte záhy. Teď na uklidnění uvedeme větu pro výpočet limity vzhledem k aritmetickým operacím. Tato věta je shodná s tou, kterou znáte pro funkci jedné proměnné.

Věta 6.1 *Nechť* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = A$ *a* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x, y) = B$. *Pak platí:*

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \pm g(x, y)) = A \pm B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = A \cdot B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{(f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \qquad B \neq 0$$

Pro funkce dvou proměnných je definován pojem spojitost analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Def. 6.6 *Řekneme, že funkce je v bodě $M[x_0; y_0]$ spojitá, je-li $f(x_0; y_0) = \lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y)$. Řekneme, že funkce je spojitá v oblasti O, jestliže je spojitá v každém bodě této oblasti.*

Poznámka 6.1 *Pojem spojitosti v bodě lze samozřejmě definovat i bez pojmu limita, a to tak, že definici limity opíšeme a číslo L nahradíme $f(x_0; y_0)$.*

Poznámka 6.2 *Jestliže jsme zkoumali spojitost funkce na uzavřeném intervalu, tak jsme v krajních bodech tohoto intervalu definovali spojitost zleva (zprava). U funkce dvou proměnných toto postrádá smysl, přesto můžeme uvažovat i o pojmu spojitost na uzavřené oblasti. Pro hraniční body budeme prostě ignorovat ty body z jeho okolí, které nespadají do dané oblasti.*

Nyní si ukážeme několik příkladů na výpočet limity. Zatímco u funkce jedné proměnné je situace podobná ražbě tunelu z obou stran, kdy se buď trefíme přesně nebo máme dva tunely, zde musíme vyzkoušet všechny možné cesty, a že jich je.

Příklad 6.2 *Určete limitu $\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y}$. Tato funkce v bodě $[0; 0]$ není definována, pokusíme se tedy spočítat limity pro různé cesty. Začněmě přímkami $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k}$$

Limity pro různé směry jsou různé, limita neexistuje. Tato situace paradoxně nenastane, pokud bychom se přibližovali po parabolách $y = kx^2$.

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+kx}{1-kx} = 1$$

Příklad 6.3 *Zjistěte, zda existuje $\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. Zkusme se nejdřív přibližovat po přímkách $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{kx^2+2x-kx} = 0,$$

ovšem s výjimkou $k = 2$, to je

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x+2-2} = 2$$

Tato limita tedy neexistuje.

K bodu $P_0[x_0; y_0]$ se z bodu $P[x; y]$ můžeme rovněž přibližovat po dvou kolmých přímkách $x = p$ a $y = q$, kde p a q jsou konstanty, a to dvojím způsobem. Pak lze limitu funkce vypočítat postupným limitním přechodem funkce jedné proměnné, jak uvádí následující věta.

Věta 6.2 *Označme*

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1 \qquad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Uvědomte si, že tato věta je implikací a představuje pouze podmínku nutnou, což značí, že bude sloužit k důkazu neexistence limity.

Příklad 6.4 *Rozhodněte, zda existuje limita*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x-2y}{3x+y}$$

Určíme postupné limity.

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y} = -2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3y} = \frac{1}{3}.$$

Tato limita neexistuje.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí následující věta.

Věta 6.3 *Nechť pro všechny body* $x \in O$ *s výjimkou bodu* $M[x_0;y_0]$ *platí* $f(x,y) = g(x,y)$ *a nechť je* $\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L$. *Pak je i* $\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x,y) = L$.

Příklad 6.5

$$\lim_{[x;y]\to[1;1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;1]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

Tato funkce je v okolí bodu $[1;1]$ *shodná s funkcí*

$$z = \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

Její limita je v tomto bodě rovna funkční hodnotě, tedy je

$$\lim_{[x;y]\to[1;1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;1]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{3}{4}$$

Při výpočtu limity můžeme použít i některé triky známé z funkce jedné proměnné, jeden příklad následuje.

Příklad 6.6

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Vynásobíme-li funkci jedničkou ve tvaru

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}$$

a upravíme-li, počítáme limitu

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12$$

Závěrem této části vám uvedu tři limity, které vám určitě něco připomenou.

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\operatorname{tg} f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \left(1+\frac{1}{f(x,y)}\right)^{f(x,y)} = e$$

6.2 Parciální derivace

Už problémy s limitou nám naznačují, že to s derivacemi vůbec nebude snadné. Pokud bychom chtěli udělat nějakou analogii s funkcí jedné proměnné, bylo by to značně obtížné. Proto půjdeme jinou cestou. Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Pokud však plochu řízneme nějakou rovinou, tak řezem je křivka, křivku umíme popsat funkcí jedné proměnné—čajník je v kredenci. My budeme řezat rovinami kolmými k osám x a y.

Def. 6.7 *Nechť existuje limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle x v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ či $f'_x(x_0,y_0)$. Analogicky definujeme parciální derivaci podle y. Nechť existuje limita

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle y v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ či $f'_y(x_0,y_0)$. Má-li funkce parciální derivaci podle nějaké proměnné v každém bodě nějaké oblasti M, potom říkáme, že zde má parciální derivaci. Jinými slovy vznikne na této oblasti nová funkce, to je stejné jako u funkce jedné proměnné.

Protože jsme parciální derivace definovali jako derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně všechna pravidla tak jak je znáte z kurzu MA1, nebudu je tedy uvádět. Stejně tak nebudu řešit derivace vyšších řádů, tam ovšem jeden problém přece jen vyvstane. Záleží na pořádí proměnných podle kterých derivujeme nebo nezáleží, to je oč tu běží. Odpověď nám dává Schwarzova věta.

Věta 6.4 *Nechť jsou derivace $f''_{xy}(x,y)$ a $f''_{yx}(x,y)$ jsou v bodě $M[x_0;y_0]$ spojité. Pak jsou si rovny.*

Obdobnou větu bychom mohli zformulovat i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů. Jak vidíme, u spojitých funkcí je to s parciálními derivacemi jako s mušketýry, je jich o jednu víc než je jejich řád. Stejně jako tři mušketýři byli čtyři, tak i třetí parciální derivace jsou čtyři: f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyy} a f'''_{yyy}. Tak je tomu u parciálních derivací jakéhokoliv řádu.

Příklad 6.7 *Je-li $z = u(x) + v(y)$, je $z'_x = u'(x)$, $z'_y = v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)$, $z''_{yy} = v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$. Tak je-li $z = 3x^2 - 5y^3 + 1$, máme $z'_x = 6x$ a $z'_y = -15y^2$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 6$, $z''_{yy} = -30y$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.*

Příklad 6.8 *Je-li $z = u(x)v(y)$, je $z'_x = u'(x)v(y)$, $z'_y = u(x)v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)v(x)$, $z''_{yy} = u(x)v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = u'(x)v'(y)$. Tak je-li $z = 5x^2y^4$, máme $z'_x = 10xy^4$ a $z'_y = 20x^2y^3$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 10y^4$, $z''_{yy} = 60x^2y^2$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 40xy^3$.*

Příklad 6.9 *Je-li $z = \frac{u(x)}{v(y)}$, je $z'_x = \frac{u'(x)}{v(y)}$, $z'_y = -\frac{u(x)v'(y)}{v^2(y)}$, $z''_{xx} = \frac{u''(x)}{v(y)}$, $z''_{yx} = z''_{yx} = -\frac{u'(x)v'(y)}{v^2(y)}$ a $z''_{yy} = -u(x)\frac{v''(y)v(y)-2(v'(y))^2}{v^3(x)}$. Konkrétní příklad dáme tento: $z = \frac{x}{y^2}$. Potom je $z'_x = \frac{1}{y^2}$, $z'_y = \frac{-2x}{y^3}$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}$ a $z'' = \frac{-2}{y^3}$.*

Pkud nejsou proměnné separovány, postupujeme standardně.

Příklad 6.10 *Určete první a druhé derivace funkce $z = \sin(x^2+y^2)$. Máme $z'_x = 2x\cos(x^2+y^2)$, $z'_y = 2y\cos(x^2+y^2)$. Derivujeme jako součin a máme $z''_{xx} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)$ a $z''_{yy} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2)$. Při smíšené vyjdeme z y'_x a derivujeme podle y, x je konstanta. Obdržíme $z''_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2$*

6.3 Totální diferenciál

Podobně jako u funkce jedné proměnné zavedeme pojem diferenciál. Samozřejmě, že můžeme pro parciální derivace definovat parciální diferenciály naprosto stejným způsobem jako u funkce jedné proměnné. Jenže probíráme funkci dvou proměnných, takže není dobré, aby si jednotlivé proměnné hrály na svém písečku. Chápu, že slovo totální nemá dnes nejlepší pověst, leč matematika je na politické situaci nezávislá. Kdo by s tím měl problém, nechť si místo slova totální myslí ekvivalentní výrazy (úplný, celkový).

Def. 6.8 *Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná (má zde totální diferenciál), je-li*

$$\Delta z = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varrho\tau(h,k),$$

kde A, B jsou konstanty, $\varrho = \sqrt{h^2+k^2}$ a $\lim\limits_{[h;k]\to[0;0]} \tau(h,k) = 0$.

Na otázku kdy to nastane nám dá odpověď následující věta.

Věta 6.5 *Je-li $f(x_0,y_0)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0).$$

Poznámka 6.3 *Dále budeme používat běžné označení $h = dx$, $k = dy$.*

Def. 6.9 *Je-li funkce $f(x,y)$ v boděM$[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak výraz*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)dy$$

nazýváme totální diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$

Věta 6.6 *Nechť $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak je zde spojitá.*

Věta 6.7 *Jsou-li první parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ spojité, pak je zde diferencovatelná.*

Hlavní význam diferenciálu funkce jedné proměnné spočíval v tom, že jsme mohli (skutečný) přírůstek funkce v bodě nahradit s jistou chybou diferenciálem, čili graf funkce nahradit v okolí tohoto bodu tečnou. Obdobně lze postupovat i u funkce dvou proměnných, jen tečnu nahradíme tečnou rovinnou. Jak stanovit její rovnici nám ukáže další věta.

Věta 6.8 *Je-li $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má plocha $z = f(x,y)$ v bodě $M_p[x_0;y_0;z_0]$ tečnou rovinu, jejíž rovnice má tvar*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)(y-y_0)$$

Menší zádrhel spočívá v tom, že tak jako neumíme (neurčitě) integrovat libovolnou funkci, ne každý výraz tvaru $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je diferenciálem nějaké funkce. Kdy tomu tak je nám odpoví následující věta.

Věta 6.9 *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité v oblasti O a stejně tak jsou zde spojité i jejich parciální derivace. Pak výraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je totálním diferenciálem jisté funkce $f(x,y)$ právě tehdy, když platí*

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y).$$

Užití diferenciálu si ukážeme na příkladu.

Příklad 6.11 *Válec má poloměr 2 dm a výšku 10 dm. Jak se změní jeho objem, jestliže se při deformaci poloměr zvětší na 2,05 dm a výška naopak zmenší na 9,8 dm? Objem válce je $V = \pi r^2 v$, což lze chápat jako funkce dvou proměnných r a v. Totální diferenciál má tvar*

$$dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv$$

Zde je $dr = +0,05$ a $dv = -0,2$. Po dosazení do diferenciálu máme $dV = 1,2\pi \doteq 3,77\mathrm{dm}^3$.

Příklad 6.12 *Ověřte, zda výraz $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$ je totálním diferenciálem této funkce. V případě že ano, nalezněte tuto funkci. Ověření nebude těžké, neboť $P'_y = -2xy = Q'_x$. Na nalezení funkce, jejíž totální diferenciál jsme právě objevili, vám poradím jednu inženýrskou fintu. Zintegrujeme obě části dle patřičné proměnné, přičemž tu druhou budeme považovat za konstantu.*

$$\int (2x^3 - xy^2)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$\int (2y^3 - x^2y)dy = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

Do hledané funkce $z = f(x, y)$ vezmeme první integrál celý, z druhého pak vezmeme pouze ty sčítance, které se v prvním nevyskytují. Je tedy

$$z = \frac{1}{2}(x^4 - x^2y^2 + y^4) + c$$

Totální diferenciál je velmi důležitý pojem ve fyzice. Je-li výraz $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ totální diferenciál, pak ho lze integrovat, přičemž hodnota tohoto integrálu nezávisí na integrační cestě z bodu A do bodu B, nýbrž pouze na hodnotách funkce $z = f(x, y)$ v těchto bodech (je to jakoby klasický Newtonův integrál). Funkce z pak reprezentuje veličinu stavovou.

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat totální diferenciál řádu n.

Def. 6.10 *Totální diferenciál řádu n funkce dvou proměnných je výraz*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y)$$

Jak postupovat si ukážeme na příkladě.

Příklad 6.13 *Určete totální diferenciály druhého a třetího řádu funkce $z = y \ln x$. Nejdříve si určíme všechny parciální derivace až do řádu 3. $z'_x = \frac{y}{x}$, $z'_y = \ln x$, $z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$, $z''_{xy} = \frac{1}{x}$, $z''_{yy} = 0$, $z'''_{xxx} = \frac{2y}{x^3}$, $z'''_{xxy} = -\frac{1}{x^2}$, $z'''_{xyy} = z'''_{yyy} = 0$. Totální diferenciál druhého řádu je*

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2 = -\frac{y}{x^2}(dx)^2 + \frac{2}{x}dxdy(dy)^2$$

Totální diferenciál třetího řádu je pak

$$d^3z = z'''xxx(dx)^3 + 3z'''_{xxy}(dx)^2dy + 3z'''_{xyy}dx(dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3 = \frac{2y}{x^3}(dx)^3 - \frac{3}{x^2}(dx)^2dy$$

6.3.1 Extrémy funkce dvou proměnných

Def. 6.11 *Řekneme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ lokální maximum (minimum), existuje-li okolí O bodu M takové, že pro všechna $x \in O$ platí $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).*

Postup při stanovení extrémů je obdobný jako u funkce jedné proměnné.

Věta 6.10 *Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ lokální extrém a nechť existují v bodě M parciální derivace prvního řádu. Pak je $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

Poznámka 6.4 *Tak jako u funkce jedné proměnné budeme bod M nazývat bodem stacionárním.*

Stacionární (podezřelé z extrému) body budeme vyšetřovat pomocí následující věty.

Věta 6.11 *Nechť M je stacionární bod a nechť v jeho okolí existují spojité parciální derivace prvního a druhého řádu. Vypočtěme výraz*

$$D = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Je-li $D > 0$, pak pro $f''_{xx} > 0$ je v bodě M lokální minimum a pro $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ je v bodě M lokální minimum. Je-li $D < 0$, pak v bodě M extrém není, je-li $D = 0$, nemůžeme o extrému rozhodnout (extrém tady být může, ale nemusí).

Poznámka 6.5 *Označení D jsme nezvolili náhodou, D je de facto determinant druhého řádu, přičemž v hlavní diagonále jsou derivace podle xx a yy a ve vedlejší diagonále jsou derivace smíšené (ty jsou si samozřejmě rovny).*

Nyní ukážeme několik příkladů.

Příklad 6.14 *Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$. Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu.*

$$f'_x = 3x^2 + y^2 + 12x, \qquad f'_y = 2xy + 2y$$

. Položíme-li tyto derivace rovny nule, získáme čtyři stacionární body $S_1[-1; 3]$, $S_2[-1; -3]$, $S_3[0; 0]$ a $S_4[-4; 0]$. Spočteme tedy parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx} = 6x + 12, \qquad f''_{xy} = 2y, \qquad f''_{yy} = 2x + 2.$$

Budeme postupně dosazovat jednotlivé stacionární body a počítat číslo D. V prvních dvou případech je $D(S_1) = -36$, $D(S_2) = -36$, extrém nenastává. $D(S_3) = 24$ a protože je $f''_{xx}(0, 0) = 12$, je v počátku minimum. Naproti tomu je $D(S_4) = 24$, ale tentokrát je $f''_{xx}(-4, 0) = -12$, v bodě S_4 je tedy maximum.

Příklad 6.15 *Určete lokální extrémy funkce* $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$. *Začneme prvními parciálními derivacemi.*

$$z'_x = 2x + 4y - 2 \qquad z'_y = 4x + 12y + 8$$

Opět položíme obě derivace rovny nule, po vyřešení soustavy dvou lineárních rovnic získáme jediný stacionární bod $S[7; -3]$. *Druhé parciální derivace jsou* $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 4$ *a* $z''_{yy} = 12$. *Všechny jsou konstantní, není kam dosazovat a determinant má univerzální hodnotu* $D = 8 > 0$. *Jelikož je* $z''_{xx} = 2 > 0$, *je v bodě* S *lokální minimum. Jen pro zajímavost, jeho hodnota je* $z(7, -3) = -24$.

Příklad 6.16 *Určete lokální extrémy funkce* $z = -3x^4 - 5y^4$. *Spočteme první derivace* $z'_x = -12x^3$, $z'_y = -20y^3$. *Jediným stacionárním bodem je počátek. Jdeme na druhé derivace.* $z''_{xx} = -36x^2$, $z''_{yy} = -60y^2$, $z''_{xy} = 0$. *Zřejmě je* $D = 0$, *o extrému nemůžeme tímto způsobem rozhodnout. My si ale všimneme, že funkční hodnoty jsou mimo počátek záporné, je zřejmé, že v počátku bude maximum.*

Tak jako u funkce jedné proměnné můžeme určovat i extrémy absolutní, a to v případě, že je funkce definovaná na uzavřené oblasti. Ty pak mohou nastat buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici oblasti. Ukážeme si to na příkladu, nejdříve trochu teorie.

Def. 6.12 *Řekneme, že funkce* $f(x, y)$ *má v bodě* $[x_0; y_0]$ *absolutní maximum (minimum), jestliže pro všechny body* $[x; y] \in M$ *platí* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$.

Def. 6.13 *Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnitřním bodem množiny* M, *existuje-li okolí* O *tohoto bodu takové, že* $O \subset M$. *Množina, která obsahuje pouze vnitřní body, se nazývá otevřená. Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnějším bodem množiny* M, *jestliže každé jeho obsahuje jak body množiny* M, *tak i body, které do ní nepatří. Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí. Množina, která obsahuje všechny své hraniční body, se nazývá uzavřená.*

Def. 6.14 *Množina* M *se nazývá omezená, existuje-li kruh* K *se středem v počátku tak, že* $M \subseteq K$.

Věta 6.12 *Nechť* $f(x, y)$ *je spojitá funkce definovaná na omezené uzavřené množině. Pak zde nabývá své nejmenší a největší hodnoty.*

Příklad 6.17 *Stanovte absolutní extrémy funkce* $z = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$. *Po doplnění na čtverec zjistíme, že definičním oborem jsou vnitřní a hraniční body elipsy* $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$. *Stacionární body určíme řešením soustavy rovnic*

$$z'_x = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0 \qquad z'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0$$

Existuje jediný stacionární bod $S[1; 0]$. *Je* $f(1, 0) = 1$. *Stanovení extrémů na hranici je obecně velmi obtížné, vezmeme-li rozum do hrsti, tak vidím,e že funkce je na hranici rovna nule a jinak je kladná. Absolutní maximum je tedy ve středu elipsy a minimun na její hranici.*

Podobně jako u funkce jedné proměnné se budeme ptát, zda lze funkci dvou proměnných nahradit polynomem v okolí nějakého bodu $A[x_0; y_0]$. Odpověď zní ano, je to analogické, jen derivace musíme nahradit totálními diferenciály. Následující věta se nazývá Taylorova.

Věta 6.13 *Nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace do řádu $n+1$ včetně na množině $M \subset \mathbb{R}_2$. Nechť body $A = [x_0; y_0]$ a $X = [x; y]$ patří do M. Potom platí*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^1 f(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0,y_0) + R_{n+1}$$

Že $dx = x - x_0$ a $dy = y - y_0$ jste jistě poznali sami. Zbytek se nejčastěji vyjadřuje ve tvaru

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f(\xi,\eta)$$

Čísla ξ a η leží mezi x ax_0, resp. y a y_0.

Literatura

[1] Novák V.: Diferenciální počet v $\mathbb{R}$. MU Brno, fakulta přírodovědecká, Brno 1995