Kapitola 1

Diferenciální rovnice

1.1 Úvod

V kurzu Matematická analýza 1 jsme se seznámili s pojmem derivace, naučili se derivovat některé elementární funkce a řekli si též některé aplikace derivací. Jednou z nich byla i aplikace fyzikální, a to $v(t) = s'(t)$—slovy okamžitá rychlost je první derivací dráhy podle času. Je-li nám známo jak se mění dráha pohybujícího se tělesa v závislosti na čase, snadno spočítáme, jakou rychlostí se hmotný bod v daném čase pohybuje. Co když však známe závislost okamžité rychlosti na čase a neznáme dráhu? Z fyziky víme, že u pohybu rovnoměrně zrychleného platí pro rychlost vztah $v = at$, kde a je zrychlení; pro tento typ pohybu se jedná o konstantu. Víme, že dráha pohybu rovnoměrně zrychleného je dána vztahem $s = \frac{1}{2}at^2 + s_0$, kde s_0 je konstanta, jejíž fyzikální význam je dráha v čase $t = 0$. Snadno se přesvědčíme, že $s'(t) = v(t) = at$.

Zamysleme se však nad problémem trochu z jiné stránky. Zopakujme si, co je zadáno, je to vlastně rovnice, neboť znaménko rovná se pominout nelze. Máme $s'(t) = a.t$, tato rovnice obsahuje zprava nezávisle proměnnou t, konstantu a a první derivaci závisle proměnné $s(t)$. Poslední položka je klíčová, my funkci $s(t)$ neznáme, hledáme ji. Takovým rovnicím, které obsahují derivaci/ce jisté neznámé funkce budeme říkat rovnice diferenciální. My jsme ji vyřešili prostým integrováním, proto se také výsledek zhusta nazývá integrál diferenciální rovnice. Jelikož jsme integrovali neurčitě, tak nesmíme zapomenout na integrační konstantu. Ta tam smysl má. Jednak v tomto příkladu to musí být nějaká dráha, k níž se dopracujeme tak, že volíme $t = 0s$, je to tedy dráha v čase $t = 0s$, tedy dráha na počátku pohybu. Chápeme-li problém čistě matematicky, pak hledaná funkce je funkce kvadratická, jejímž grafem je parabola. Budeme-li volit různé hodnoty této konstanty, budeme s parabolou šibovat ve směru osy s.

1.2 Základní pojmy

Ať chceme nebo nechceme, musíme se pustit do teorie.

Def. 1.1 *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $F(x, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ je funkce $n+2$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \in \mathbb{R}^{n+2}$. Pak rovnice*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice n-řádu v implicitním tvaru s neznámou $y(x)$.

Někdy se nám podaří osamostatnit nejvyšší derivaci, pak máme následující definici.

Def. 1.2 *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $y = f(x, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ je funkce $n+1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pak rovnice*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

se nazývá obyčejná diferenciální rovnice n-řádu v explicitním tvaru s neznámou $y(x)$.

Def. 1.3 *Nechť $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J. Tato funkce se nazývá řešením rovnice (1. 1) na intervalu J, jestliže má tato funkce derivace až do řádu n, pro každé $x \in J$ je $(x, h(x), h'(x), \ldots, h^{(n)}) \in \Omega$ a platí*

$$F[x, h(x), h'(x), \ldots, h^{(n)}] = 0, \quad x \in J.$$

Zejména v aplikačních úlohách nehledáme obecné řešení, nýbrž takové, které vyhovuje určitým (počátečním) podmínkám. Přidáme tedy ještě jednu definici.

Def. 1.4 *Nechť je dána n-tice $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \Omega$. Pak úlohu najít řešení rovnice (1.2), které je definované na nějakém intervalu I obsahujícím x_0 a takové, že*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

se nazývá Cauchyho počáteční úloha.

1.3 Diferenciální rovnice prvního řádu

Připomínáme, že tato rovnice je tvaru

$$F(x, y, y') = 0$$

a případná počáteční podmínka je tvaru $y(x_0) = y_0$

První otázka, kterou si musíme odpovědět, zda vůbec má smysl hledat řešení. Odpověď zní ano, jak nás o tom ujistí následující věta.

Věta 1.1 *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině Ω. Pak pro každé $(x_0; y_0) \in \Omega$ má úloha*

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) \tag{1.3}$$

alespoň jedno řešení.

Příklad 1.1 *Řešte rovnici $y' = 2\sqrt{y}$.*

To, že není zadána počáteční podmínka nevadí, nevadí ani to, že jsme zatím neuvedli žádnou metodu jak rovnice řešit. Jedno řešení by našel i Zilvar z chudobince, a sice $y = 0$. Zbývající hoši z oné báječné party by zajisté našli i další možnost, a to $y = x^2$. Přidáme-li počáteční podmínku $y(0) = 0$, pak snadno zjistíme, že obě tato řešení ji splní, jinými slovy v tomto případě z počátku vycházejí dvě křivky, jejichž cesty se ovšem po opuštění bodu $x = 0$ rozejdou.

Je nabíledni, že bude nutné definovat jednoznačné řešení a za jakých podmínek toto řešení existuje.

Def. 1.5 *Řekneme, že počáteční problém (3.1) má jediné řešení, jestliže pro každá dvě jeho řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je $y_1(x) = y_2(x)$.*

Věta 1.2 *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále existuje konstanta $K > 0$ a okolí O bodu (x_0, y_0), $O \subset \Omega$ takové, že pro každé dva body $(x, y_1) \in O$, $(x, y_2) \in O$ platí*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Pak pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha (1.3) právě jedno řešení.

Poznámka 1.1 *Podmínka v předchozí větě se nazývá Lipschitzova a je splněna například v situaci, kdy v okolí bodu (x_0, y_0) existuje spojitá parciálni derivace $\frac{\partial f/x,y)}{\partial y}$.*

1.4 Rovnice se separovatelnými proměnnými

Vraťme se ještě k výpočtu dráhy. Použijeme-li Leibnizovu symboliku, lze psát $v = s' = \frac{ds}{dt} = at$ lze rovnici upravit na tvar $ds = atdt$. Levou stranu budeme integrovat podle s, pravou pak podle t, čímž obdržíme výsledek $s = \frac{1}{2}at^2 + c$. Tento postup nám umožnila skutečnost, že jsme obě proměnné od sebe oddělili (separovali). Můžeme tedy stanovit obecný postup.

Def. 1.6 *Rovnici tvaru*

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1.4}$$

nazýváme diferenciální rovnicí se separovatelnými proměnnými.

Předpokládáme-li že $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité funkce na jistých otevřených intervalech a $g(y) \neq 0$, je zaručena existence a jednoznačnost řešení, které získáme následujícím postupem.

Proměnnou y převedeme na levou stranu a proměnnou x na stranu pravou (lze i naopak) a získanou rovnost integrujeme, čímž obdržíme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Jsou-li $F(x)$ a $G(y)$ patřičné primitivní funkce, má řešení tvar

$$G(y) = F(x) + c.$$

Příklad 1.2 *Řešte rovnici*

$$x^3y' + 3y^2 - xy^2 = 0.$$

Tato rovnice je se separovatelnými proměnnými a dá se upravit na tvar

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{(x-3)dx}{x^3} = \frac{1}{x^2}dx - \frac{3}{x^3}dx.$$

Po integraci obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + c,$$

což upravíme na tvar

$$2x^2 - 2xy + 3y + 2cx^2y = 0.$$

Řešení jsme obdrželi v implicitním tvaru, což je běžný případ. Někdy však máme štěstí a řešení se nám podaří získat i ve tvaru explicitním, viz následující příklad.

Příklad 1.3 *Řešte rovnici*

$$y' = \frac{y}{x}$$

Snadná úprava vede k rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x}.$$

Z předchozích kurzů analýzy jsme již získali jistou státnickou moudrost a prozíravost, takže víme, že obě primitivní fukce budou přirozený logaritmus. Nabízí se tedy i integrační konstantu psát ve tvaru logaritmu.

$$\ln y = \ln x + \ln |c| \rightarrow y = cx.$$

Obecným řešením je svazek přímek se středem v počátku.

S nově získanými znalostmi můžeme konečně pořádně vyřešit příklad (1.1). Je zřejmé, že to opět povede na rovnici se separovatelnými proměnnými

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

a po integraci

$$\sqrt{y} = x + c.$$

Jsme pozorní a víme, že musí být $x > -c$, odmocnina musí být v tomto případě kladná. Lepší náhled získáme, když rovnici umocníme, čímž obdržíme

$$y = (x+c)^2 \qquad x > -c$$

Řešením jsou pravé půlky parabol $y = (x+c)^2$, které mají vrchol na ose x a jimiž je po této ose různě šibováno. Ať volíme konstantu c jak chceme, Zilvarovo řešení $y = 0$ nebude. Tato skutečnost nás vede k další definici.

Def. 1.7 *Řešení rovnice (1.2), které má tu vlastnost, že v každém bodě je porušena jednoznačnost, se nazývá singulární.*

Poznámka 1.2 *Jak již bylo naznačeno, singulární řešení nelze obdržet z obecného volbou konstant. Toto řešení je obálkou řešení obecných či jinými slovy singulární řešení je v každém bodě tečnou k jistému řešení partikulárnímu.*

1.4.1 Rovnice homogenní

Některé rovnice sice nejsou se separovatelnými proměnnými, ale vhodnou substitucí či úpravou je lze na tento typ převést. My si ukážeme, jak se to dělá u tzv. rovnic homogenních.

Def. 1.8 *Rovnice 1. řádu, která má explicitní tvar*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.5}$$

se nazývá homogenní.

Tuto rovnici řešíme substitucí $\frac{y}{x} = z$. Tuto rovnici nejdříve převedeme na vhodnější tvar $y = xz$. Derivujeme-li tuto rovnici, obdržíme $y' = z + xz'$. Rovnice má pak tvar

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z},$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými. Na příkladu to bude jasnější.

Příklad 1.4 *Řešte rovnici $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$. Tato rovnice na homogenní sice nevypadá, ale podělíme-li ji x^2, získáme*

$$\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2\right) dx - 2\frac{x}{y} dx = 0,$$

což lze upravit na tvar

$$y' = \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}{2\frac{x}{y}}.$$

Zavedeme substituci $y = xz$ a $y' = z'x + z$, přejde rovnice na tvar

$$\frac{dx}{x} + \frac{2zdz}{z^2 + 1} = 0.$$

Integrace je snadná, výsledkem je $\ln|x| + \ln(z^2 + 1) = \ln|c|$. Po návratu k původním proměnným, odlogaritmování a snadné úpravě obdržíme řešení

$$x^3 + y^2 - cx = 0.$$

1.5 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Def. 1.9 *Lineární diferenciální rovnice má tvar*

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{1.6}$$

Bohužel byli matematici příliš aktivní a dokázali následující větu.

Věta 1.3 *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla. Pak počáteční problém*

$$y' = f(x)y + g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

má právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu I.

Tato věta nám nařizuje pokusit se řešení lineární rovnice hledat. Nejdříve uvedeme jednu definici, která se matematikům příliš nepovedla.

Def. 1.10 *Nechť v lineární diferenciální rovnici platí $g(x) \equiv 0$ na celám intervalu I. Pak tuto rovnici nazveme homogenní. V opačném případě se rovnice nazývá nehomogenní.*

No, toto se opravdu nepovedlo, ale musíme to respektovat. V některých publikacích jsem našel podle mne vhodnější název rovnice zkrácená. Pozorný čtenář si zajisté všimnul, že rovnice homogenní je rovnice se separovatelnými proměnnými, kterou již řešit umíme. Navíc je zřejmé, že tato rovnice má vždy tzv. triviální řešení $y \equiv 0$. Pro nalezení obecného řešení nám může pomoci následující věta.

Věta 1.4 *Nechť $Y(x)$ je libovolné partikulární řešení lineární rovnice* (1.6) *a $y^*(x)$ je libovolné partikulární řešení patřičné rovnice homogenní. Pak obecné řešení rovnice* (1.6) *má tvar $y(x) = cy^*(x) + Y(x)$. Řečeno jednoduše: Obecné řešení rovnice* (1.6) *nalezneme tak, že k obecnému řešení patřičné rovnice homogenní (zkrácené) přičteme její libovolné partikulární řešení.*

K nalezení partikulárního řešení nám poslouží zajímavá metoda zvaná *variace konstanty*. Dejme tomu, že se nám podařilo najít obecné řešení rovnice (1.6) a to ve tvaru $y = ch(x)$. Nyní změníme konstantu na neznámou funkci $c(x)$ a budeme se ptát, zda toto není obecné řešení rovnice (1.6. Musíme to vyzkoušet, proto předpokládané řešení zderivujeme a dosadíme do (1.6). Máme

$$c'(x)h(x) + c(x)h'(x) = f(x)c(x)h(x) + g(x)$$

Jelikož $h(x)$ je řešení rovnice homogenní, musí platit $h'(x) = f(x)h(x)$, máme

$$c'(x)h(x) = g(x)$$

a konečně

$$c'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Možná se vám to zdá moc složité, ale obecný postup není třeba si pamatovat. Stačí si jen zapamotovat, že konstantu změníme ve funkci a provedeme zkoušku. Tento postup je samoopravovací, $c(x)$ prostě musí vypadnout. Na příkladu to bude jasné.

Příklad 1.5 *Řešte rovnici $y' = 2y + x$.*

Rovnici homogenní upravíme na tvar $\frac{dy}{y} = 2dy$. Po integraci a odlogaritmování máme $y = ce^{2x}$. Konstantu c proměníme ve funkci $c(x)$ a provedeme zkoušku.

$$c'(x)e^{2x} + c(x)2e^{2x} = 2c(x)e^{2x} + x.$$

Vidíme, že výraz obsahující $c(x)$ spolehlivě zmizel a nám zbývá vypočítat integrál funkce xe^{-2x}. Na ten pustíme metodu per partes a obdržíme $c(x) = e^{-2x}(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) + K$. Řešení úlohy je tedy $y = Ke^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

Poznámka 1.3 *Snadno se přesvědčíme, že* $Y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ *je skutečně partikulární integrál zadané rovnice.*

Věta 1.5 *Nechť* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *jsou libovolná řešení rovnice homogenní a* $c \in \mathbb{R}$*. Pak také* $y_1(x) + y_2(x)$ *a* $cy_1(x)$ *jsou řešením této rovnice.*

Poznámka 1.4 *Řečeno slovy součet dvou řešení a násobek řešení je rovněž řešení. Jestli vám to připomíná definici vektorového prostoru, pak se nejedná o podobnost čistě náhodnou. Množina všech řešení rovnice homogenní tvoří skutečně vektorový prostor a jelikož počáteční problém má jednoznačné řešení, pak má tento prostor dimenzi jedna. Za bázi můžeme vybrat libovolné řešení.*

Jak je tomu s řešením rovnice lineární (1.6) nám odpoví následující věta.

Věta 1.6 *Nechť* $y_1(x)$ *je řešení rovnice* $y' = f(x)+g_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *je řešením rovnice* $y' = f(x)+g_2(x)$ *na intervalu* I *a* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. Pak funkce* $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ *je řešením rovnice*

$$y' = f(x)y + c_1g_1(x) + c_2g_2(x).$$

Poznámka 1.5 *Výsledek obsažený v předchozí větě se nazývá princip superpozice.*

1.6 Lineární rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty

Začneme opět pružinou, se kterou jsme se již setkali v pojednání o integrálu. Jelikož nám pružina kmitá ve směru svislém, tak budeme jako nezávisle proměnnou používat y, tak jak je to běžné ve fyzice. Aby pružina kmitala, musí být pružná, tedy musí platit Hookův zákon $F = Ky$. Touto silou je ovšem pružina natahována, do původní polohy ji vrací reakce, tedy síla stejné velikosti ale opačného znaménka. No a podle druhého Newtonova zákona musí být síla přímo úměrná zrychlení, obdržíme tudíž diferenciální rovnici $my'' = -Ky$, kterou upravíme na tvar $y'' + \frac{K}{m} = 0$. Opět jsme postaveni před problém takovou rovnici vyřešit, musíme něco zkusit. Exponenciální funkce je taková milá, co kdyby řešením rovnice byla funkce $y = e^{\lambda t}$. Tož to zkusme. Máme $y' = e^{\lambda t}$ a $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ a tyto hodnoty dosadíme do původní rovnice, takže obdržíme $\lambda^2 + \frac{K}{m} = 0$. (To éčko se nám zkrátilo, je možné to provést neboť je furt kladné.) Rovnici vyřešíme snadno, kořeny jsou komplexně sdružené a mají hodnotu $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{K}{m}}$. Abychom se nemuseli párat s odmocninou, označíme $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Jelikož již něco víme o vektorových prostorech, tak řešení napíšeme ve tvaru $y = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}$. S tímto nemůžeme být úplně spokojeni, použijeme Eulerovy identity $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$. Rovnice má řešení

$$y = C_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2(\cos \omega t - i \sin \omega t),$$

po úpravě

$$y = (C_1 + C_2)\cos \omega t + i(C_1 - C_2)\sin \omega t.$$

Teď si trochu pohrajeme s konstantami. Označme $C_1 = D_1 + iD_2$ a $C_2 = D_1 - iD_2$, tím pádem je $C_1 + C_2 = 2D_1$ a $C_1 - C_2 = 2iD_2$, má rovnice řešení

$$y = 2D_1 \cos \omega t - 2D_2 \sin \omega t.$$

Toto ještě vylepšíme tím, že zavedeme nové konstanty $E_1 = 2D_1$ a $E_2 = -2D_2$.

Jelikož chceme startovat z rovnovážné polohy, musí být $y(0) = 0$, tedy $E_1 = 0$. Máme známý harmonický kmit $y = E_2 \sin \omega t$. Nakonec dodáme, že $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence.

Tak se nám pružina hezky rozkmitala, tak se zase na chvíli můžeme vrátit k matematice. Naše cíle jsou skromné, tak se budeme věnovat homogenní (zkrácené) lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, tedy rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1.7}$$

Už víme, že řešení budeme hledat ve tvaru $y = e^{\lambda x}$. Spočtěme patřičné derivace a dosaďme do rovnice (1.7). Máme

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$$

Jelikož e na cokoliv je vždy kladné, tak je můžeme zkrátit, ten zbytek pak nazveme *charakteristickou rovnicí.* Mohou nastat tři případy.

Charakteristická rovnice má dva reálné kořeny λ_1 a λ_2. Vypomůžeme si opět vektorovým prostorem, ten bude mít v našem případě dimenzi dva a bázové vektory budou $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Tuto množinu nazýváme *fundamentální systém řešení.* Obecné řešení rovnice (1.7) má tvar

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e \lambda_2 x.$$

Druhá možnost je, že charakteristická rovnice má komplexně sdružené kořeny $a \pm bi$. Napíšeme přímo řešení obecné, které má tvar

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Fundamentální systém řešení si zajisté odvodíte sami.

Problém nastane, jestliže charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen, to nám bude chybět druhý bázový vektor. Do těchto problémů se dostaneme například při řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$. První bázový vektor je e^{2x}, to je jasné. Druhý bázový vektor musí být samozřejmě jiný, ale zase ne moc jiný a hlavně nijak komplikovaný. Což takhle dát si špenát? Pardon, což takhle zkusit $y = xe^{2x}$? Za zkoušku nic nedáme, $y' = e^{2x} + 2xe^{2x}$ a $y'' = 4e^{2x} + 4xe^{2x}$. Dosadíme do zadané rovnice a ejhle—slunce vyšlo, je to on. Obecné řešení naší rovnice bude tedy $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. Zobecníme-li naše úvahy, pak je na místě tento závěr. Je-li a dvojnásobný kořen charakteristické rovnice, pak obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}.$$

Poznámka 1.6 *Takto můžeme postupovat při řešení rovnice libovolného stupně. Násobení x nám pomůže odstranit problém s kořeny násobnými. Přesto tato metoda má své výrazné omezení, neboť je pracné najít kořeny rovnice třetího či čvrtého stupně. U rovnic pátého a vyšších stupňů to nejde principiálně. I to je důvod, proč tyto rovnice budeme řešit jen výjimečně.*

Rovnici homogenní už řešit umíme, tak se pusťme do řešení rovnice nehomogenní, která má tvar

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(x) \tag{1.8}$$

Poznámka 1.7 *Obecně jsou koeficienty a_i funkcemi proměnné x, my se však budeme starat jen o případ, kdy jsou to konstanty.*

Zde neřeknu nic překvapivého, když uvedu následující větu.

Věta 1.7 *Nechť $y_1(x), \dots y_n(x)$ je fundamentální systém řešení rovnice (1.8) a $Y(x)$ je její libovolné partikulární řešení. Pak obecné řešení řešení rovnice (1.8) má tvar*

$$y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + Y(x).$$

To už tady jednou bylo a jak vidíme, i opakovaný vtip může být někdy vtipem. Partikulární řešení jsme hledali metodou variace konstanty, zkusme tedy něco podobného. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 1.6 *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Snadno najdeme řešení rovnice homogenní ve tvaru $y = C_1e^x + C_2xe^x$. Víme, že konstanty změníme ve funkce proměnné x, pro jednodušší psaní tu proměnnou uvádět nebudu. Víme, že musíme udělat zkoušku, tož derivujme a dostaneme

$$y' = C_1'e^x + C_1e^x + C_2'xe^x + C_2e^x + C_2xe^x.$$

Jak pravil již učitel národů, všeliké kvaltování toliko pro hovada dobré jest, proto nebudeme kvaltovat. Kdybychom bezmyšlenkovitě spočetli druhou derivaci, tak by nastaly velké problémy. Jednak bychom měli jako neznámou ve druhé derivaci a jednak by nám chyběla druhá rovnice. Dvě muchy jednou ranou zabijeme tak, že natvrdo stanovíme podmínku

$$C_1'e^x + C_2'xe^x = 0.$$

Druhá derivace se nám tím pádem značně zjednoduší na

$$y'' = C_1'e^x + C_1e^x + C_2'e^x + C_2e^x + C_2'xe^x + C_2e^x + C_2xe^x.$$

Provedeme zkoušku, už nás ani nepřekvapí, že nederivovaná céčka vypadla a dostaneme kýženou druhou rovnici

$$C_1' + C_2'(1+x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Řešit takové soustavy umíme už od ZŠ, takže odečtením máme

$$C_2' = \frac{1}{x^2+1}.$$

Z první rovnice máme

$$C_1' = -xC_2' = \frac{-x}{x^2+1}$$

Zatímco pro výpočet C_2 máme integrál tabulkový, tak $C_1 = -\ln\sqrt{x^2+1}$. Podumejte, jakou fintu jsem použil pro to, abych v čitateli získal derivaci jmenovatele. Pokud někomu schází integrační konstanty, tak vězte, že v tomto případě je nepotřebujeme, hledáme totiž partikulární integrál. Ortodoxní matematik by řekl, že je volíme rovny nule. Hledané partikulární řešení má tedy tvar

$$Y(x) = -e^x \ln\sqrt{x^2+1} + xe^x \operatorname{arctg} x$$

a řešení konečné je tedy

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x - e^x \ln\sqrt{x^2+1} + xe^x \operatorname{arctg} x$$

To byla dřina, tak až si odpočinete, budeme pokračovat dál. Jelikož dobrý matematik je líný, tak začneme přemýšlet, zda by to aspoň v některých případech nešlo jednodušeji. Pokud bude na pravé straně funkce jako v předešlém případě, tak se asi nic moc dělat nedá, ale kdyby tam byla nějaká funkce, která se derovováním prakticky nemění...Zkusme si několik takových případů ukázat.

Jednou z nejjednodušších funkcí je polynom, ten při derivaci pouze snižuje stupeň.

Příklad 1.7 *Řešte rovnici $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.*

Řešení rovnice homogenní je $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. Zbývá ještě najít partikulární integrál, naše úvahy se budou ubírat následujícím směrem. Na pravé straně je polynom druhého stupně, co kdyby partikulární integrál byl také polynom druhého stupně? Tak to zkusme. Polynom druhého stupně můžeme napsat ve tvaru $Y = Ax^2 + Bx + C$. Patřičné derivace jsou $Y' = 2Ax + B$ a $Y'' = 2A$. Dosadíme do zadané rovnice a porovnáme koeficienty u stejných mocnin, čímž obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých $9A = 2$, $-12A + 9B = -1$ a $2A - 6B + 9C = 3$. Tu snadno vyřešíme, takže řešení je $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Ne vždy je to tak jednoduché jak se přesvědčíme v následujícím příkladu.

Příklad 1.8 *Řešte rovnici $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.*

Homogenní rovnici vyřešíme snadno, výsledkem je funkce $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x}$. Na pravé straně je polynom stupně dvě, tak to zopakujeme jako v předchozím příkladě, jenže ouha, pýcha předchází pád. Tu pětku u x^2 na pravé straně není na levé straně s čím porovnat. Co teď? Vzpomeneme si na případ, kdy byl kořen charakteristické rovnice dvojnásobný. Tam jsme to vyřešili tak, že jeden vektor jsme vynásobili x. Napodobme to a původní polynom vynásobme x, do hry tedy vstupují $Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, $Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ a $Y'' = 6Ax + 2B$. Teď už to půjde jako po másle, takže se nakonec dobereme k výsledku $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - frac35x^2 + \frac{7}{25}x$. Kdyby mě slyšel ortodoxní matematik, tak by mu vstávaly valsy na hlavě hrůzou. Platí jednoduchá zásada—každý nový sčítanec musí být kvalitativně jiný a tady jsme k C_1 přičetli konstantu C, jenže součet dvou konstant není nic jiného než konstanta. Vylepšovadlem je pak vynásobení x.

Funkce exponenciální, kterou do matematiky zavedli studenti, je také vhodným kandidátem. Tak to zkusme.

Příklad 1.9 *Řešte rovnici* $y''-2y'-3y=e^{2x}$. *Vyřešit rovnici homogenní je snadné, dostaneme* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$. *Partikulární integrál budeme předpokládat ve tvaru* $Y=Ae^{2x}$. *Tuto funkci spolu s derivacemi* $Y'=2Ae^{2x}$ *a* $Y''=4Ae^{2x}$ *dosadíme do původní rovnice. Výsledné řešení je* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{3}e^{2x}$.

Příklad 1.10 *Řešte rovnici* $y''-y'-2y=e^{2x}$. *Rovnice homogenní má řešení* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. *Jelikož výraz na pravé straně je totožný s prvním členem řešení rovnice homogenní, tak víme, že pouhé zkopírování pravé strany by k ničemu nevedlo, takže použijeme vylepšovadlo a partikulární integrál budeme hledat ve tvaru* $Y=Axe^{2x}$. *Patřičné derivace jsou* $Y'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$ *a* $Y''=6Ae^{2x}+4Axe^{2x}$. *Nejsme překvapeni, že po dosazení nám členy* xe^{2x} *vypadnou a že se dopracujeme ke konečnému řešení* $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}xe^{2x}$.

Jít by to mělo i v případě funkcí sinus, kosinus a deskriptiva. Pardon, to třetí tam nepatří, jen jsem si zpíval inženýrskou od Plavců a nějak mi to tam vklouzlo. Je mi trapné vás pořád nutit do řešení rovnic homogenních, tak použiju pravou stranu z jednoho z předchozích příkladů.

Příklad 1.11 *Řešte rovnici* $y''-2y'-3y=8\cos 2x$. *Partikulární integrál budeme hledat ve tvaru* $Y=A\cos 2x$, *parřičné derivace jsou* $Y'=-2A\sin 2x$ *a* $Y''=-4A\cos 2x$. *Jenže ouha, jednou nám vyšlo* $A=\frac{8}{7}$ *a podruhé* $A=0$. *To nepůjde, řešení musí být jednoznačné, tak kde je k čertu chyba? Nemusejí se goniometrické funkce dělat jen metodou variace konstant? Přátelé, rozum do hrsti. Polynom se derivuje na polynom, éčko na éčko, ale sinus a kosinus přecházejí jedna ve druhou, jsou to holt siamská dvojčata. Tak musíme hodit repetýrku, partikulární integrál budeme hledat ve tvaru* $Y=A\cos 2x+B\sin 2x$. *Derivace už nebudu vypisovat, zkouška povede na řešení systému* $-7A-4B=8$ *a* $4A-7B=0$. *Omlouvám se, že to píšu neupraveně, ale v Texu je dost pracné. Systém snadno vyřešíme a hóknem do placu konečný výsledek* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{32}{65}\sin 2x-\frac{56}{65}\cos 2x$.

1.7 Rovnice exaktní

Typů diferenciálních rovnic je nepřeberně mnoho, závěrem uvedu jeden typ, který má návaznost na funkce dvou proměnných. Tam jsme se setkali s velmi důležitým pojmem *totální diferenciál.* Připomínám, že je to výraz

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

a že $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou parciální derivace jisté funkce dvou proměnných. Dále připomínám, že ne každý takový výrazu na který si vzpomenete je totální diferenciál, to musí platit $P_y=Q_x$. Je to analogická situace i integrálu, kdy ne ke každé funkci na kterou si vzpomeneme umíme nalézt analytické vyjádření funkce primitivní. No a položíme-li totální diferenciál roven nule, pak už máme diferenciální rovnici, například je-li $Q(x,y)$ nenulové, tak je

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

Můžeme tedy přistoupit k definici.

Def. 1.11 *Rovnice*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.9}$$

se nazývá exaktní, je-li výraz na levé straně totálním diferenciálem jisté funkce $F(x,y)$*, tedy platí-li*

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Funkce $F(x,y)$ *se nazývá funkce kmenová.*

Řešení rovnice se děje podle následující věty.

Věta 1.8 *Nechť rovnice* (1.8) *je exaktní a* $F(x,y)$ *je příslušná kmenová funkce. Pak obecné řešení má tvar*

$$F(x,y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Inženýrský způsob integrace totálního diferenciálu je ukázán v kapitole o dvou proměnných, vědecký způsob naleznete v odborné literatuře. Ale nejsem krkoun, tak vám ho ještě připomenu v následujícím příkladě.

Příklad 1.12 *Řešte rovnici*

$$\left(\frac{1}{y} + 2x\right) dx - \left(\frac{x}{y^2}\right) dy = 0$$

Pochopitelně musíme nejdřív ověřit, je-li výraz na levé straně totální diferenciál.

$$P_y = -\frac{1}{y^2} \qquad Q_x = -\frac{1}{y^2}$$

Tak to je v ókeju, můžeme spočítat patřičné integrály.

$$\int \left(\frac{1}{y} + 2x\right) dx = \frac{x}{y} + x^2 + c$$

$$\int -\left(\frac{x}{y^2} + 1\right) dx = \frac{x}{y} - y + c$$

Konstantu tam píši jen proto, abych nevyšel ze cviku. Tak a teď vezmeme první výsledek celý a z druhého jen to nové, takže řešení je

$$\frac{x}{y} + x^2 - y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Kapitola 2

Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme věnovat funkcím více proměnných. Kdo se dobře učil v minulém semestru, bude mít úlohu značně usnadněnou, neboť řada věcí je stejných či alespoň hodně podobných. Některé věci jsou však znčně odlišné, tak si na to dávejte pozor čili bacha. Budu se snažit na to upozorňovat. Na druhé straně vám to zjednoduším tím, že se budeme skoro výhradně bavit o funkci dvou proměnných.

2.1 Limita a spojitost

Def. 2.1 *Reálná funkce dvou reálných proměnných je zobrazení $M \to R$, kde $M \subseteq \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$. Jinými slovy každé uspořádané dvojici $[x; y] \in M$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$. Množina M se nazývá definiční obor, množina všech z, které jsou přiřazeny k nějaké uspořádané dvojici $[x; y]$ se nazývá obor hodnot funkce. Píšeme $z = f(x, y)$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit stručně o funkci dvou proměnných.*

Příklad 2.1 *Určete definiční obor funkce $z = \arcsin y + \ln(4 - x^2 - y^2)$. Budeme vycházet ze znalosti funkcí jedné proměnné a vzpomeneme si na definiční obory funkcí arkussinus a přirozený logaritmus. Obě mají jistá omezení, která musí platit současně, je tedy*

$$-1 \leq y \leq 1 \cap 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Zatímco první podmínce vyhoví pás mezi přímkami $y = -1$ a $y = 1$, druhé podmínce vyhoví všechny body uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem $r = 2$, v prvním případě včetně hranice. Definiční obor je samozřejmě průnik obou oblastí, leč obrázek zatím neumím.

Def. 2.2 *Grafem funkce dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z]$, kde body $[x, y]$ patří do definičního oboru funkce. Jinými slovy je to plocha o rovnici $z = f(x, y)$. Vrstevnice je křivka o rovnici $f(x, y) = c$.*

Takovým nejběžnějším příkladem grafu funkce dvou proměnných je obyčejná plastická mapa. Proměnné představují zeměpisná šířka a délka, funkční hodnotu pak nadmořská výška. Patří sem i ona původně normální mapa, která se nacházela v kanceláři 91. pěšího pluku a kterou učinil plastickou až kocour chovaný písaři. Jen připomínám, že prvním, kdo se o této změně dotykem přesvědčil byl oberst Schröder a že to mělo pro písaře nepříjemné následky. Pojem vrstevnice je převzat z geografie a má stejný význam—zlepšit představu o grafu funkce v dvourozměrném modelu.

Uvedeme několik příkladů.

2.1. Z analytické geomtrie víte, že grafem funkce $z = ax + by + c$ je rovina v $\mathbb{R}_3$.

2.2. Grafem funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem $r = 3$ nad podstavnou rovinou os x a y.

2.3. Grafem funkce $z = x^2 + y^2$ je rotační paraboloid s vrcholem v počátku, jehož osou je osa z. Vrstevnice tvoří soustředné kružnice o rovnicích $x^2 + y^2 = c$.

Nyní přistoupíme k definici pojmů limita a spojitost. Začneme definicí okolí.

Def. 2.3 *Vzdálenost dvou bodů $A[x_1; y_1]$ a $B[x_2; y_2]$ rozumíme číslo*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vzdálenost bodů ve vícerozměrném prostoru si jistě odvodíte sami.

Def. 2.4 *δ-okolím bodu P nazýváme množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu P je menší než δ. Vyjmeme-li z této množiny samotný bod P, mluvíme o ryzím okolí.*

Def. 2.5 *Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro pro všechny body z ryzího δ okolí bodu M platí*

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Píšeme $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = L.$

Definice pojmu limity je po formální stránce stejná, její výpočet je však někdy notně komplikovaný, kolikrát spíše dokazujeme, že daná funkce limitu nemá. Uvidíte záhy. Teď na uklidnění uvedeme větu pro výpočet limity vzhledem k aritmetickým operacím. Tato věta je shodná s tou, kterou znáte pro funkci jedné proměnné.

Věta 2.1 *Nechť* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x, y) = A$ *a* $\lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x, y) = B$. *Pak platí:*

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \pm g(x, y)) = A \pm B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = A \cdot B$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{(f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \qquad B \neq 0$$

Pro funkce dvou proměnných je definován pojem spojitost analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Def. 2.6 *Řekneme, že funkce je v bodě $M[x_0; y_0]$ je $f(x_0; y_0) = \lim\limits_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y)$. Řekneme, že funkce je spojitá v oblasti O, jestliže je spojitá v každém bodě této oblasti.*

Poznámka 2.1 *Pojem spojitosti v bodě lze samozřejmě definovat i bez pojmu limita, a to tak, že definici limity opíšeme a číslo L nahradíme $f(x_0; y_0)$.*

Poznámka 2.2 *Jestliže jsme zkoumali spojitost funkce na uzavřeném intervalu, tak jsme v krajních bodech tohoto intervalu definovali spojitost zleva (zprava). U funkce dvou proměnných toto postrádá smysl, přesto můžeme uvažovat i o pojmu spojitost na uzavřené oblasti. Pro hraniční body budeme prostě ignorovat ty body z jeho okolí, které nespadají do dané oblasti.*

Nyní si ukážeme několik příkladů na výpočet limity. Zatímco u funkce jedné proměnné je situace podobná ražbě tunelu z obou stran, kdy se buď trefíme přesně nebo máme dva tunely, zde musíme vyzkoušet všechny možné cesty, a že jich je.

Příklad 2.2 *Určete limitu $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y}$. Tato funkce v bodě $[0; 0]$ není definována, pokusíme se tedy spočítat limity pro různé cesty. Začněmě přímkami $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+k}{1-k}$$

Limity pro různé směry jsou různé, limita neexistuje. Tato situace paradoxně nenastane, pokud bychom se přibližovali po parabolách $y = kx^2$.

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+kx}{1-kx} = 1$$

Příklad 2.3 *Zjistěte, zda existuje $\lim\limits_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. Zkusme se nejdřív přibližovat po přímkách $y = kx$.*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{kx^2+2x-kx} = 0,$$

ovšem s výjimkou $k = 2$, to je

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x+2-2} = 2$$

Tato limita tedy neexistuje.

K bodu $P_0[x_0; y_0]$ se z bodu $P[x; y]$ můžeme rovněž přibližovat po dvou kolmých přímkách $x = p$ a $y = q$, kde p a q jsou konstanty, a to dvojím způsobem. Pak lze limitu funkce vypočítat postupným limitním přechodem funkce jedné proměnné, jak uvádí následující věta.

Věta 2.2 *Označme*

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = L_1 \qquad \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Uvědomte si, že tato věta je implikací a představuje pouze podmínku nutnou, což značí, že bude sloužit k důkazu neexistence limity.

Příklad 2.4 *Rozhodněte, zda existuje limita*

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{x-2y}{3x+y}$$

Určíme postupné limity.

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{-2y}{y} = -2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{3x+y}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3y} = \frac{1}{3}.$$

Tato limita neexistuje.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí následující věta.

Věta 2.3 *Nechť pro všechny body* $x \in O$ *s výjimkou bodu* $M[x_0; y_0]$ *platí* $f(x,y) = g(x,y)$ *a nechť je* $\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} f(x,y) = L$. *Pak je i* $\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} g(x,y) = L$.

Příklad 2.5

$$\lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

Tato funkce je v okolí bodu $[1;-1]$ *shodná s funkcí*

$$z = \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

Její limita je v tomto bodě rovna funkční hodnotě, tedy je

$$\lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x;y]\to[1;-1]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2} = \frac{3}{8}$$

Při výpočtu limity můžeme použít i některé triky známé z funkce jedné proměnné, jeden příklad následuje.

Příklad 2.6

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

Vynásobíme-li funkci jedničkou ve tvaru

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}$$

a upravíme-li, počítáme limitu

$$\lim_{[x;y]\to[0;0]} 3(\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 12$$

Závěrem této části vám uvedu tři limity, které vám určitě něco připomenou.

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \frac{\operatorname{tg} f(x,y)}{f(x,y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y]\to[x_0;y_0]} \left(1+\frac{1}{f(x,y)}\right)^{f(x,y)} = e$$

2.2 Parciální derivace

Už problémy s limitou nám naznačují, že to s derivacemi vůbec nebude snadné. Pokud bychom chtěli udělat nějakou analogii s funkcí jedné proměnné, bylo by to značně obtížné. Proto půjdeme jinou cestou. Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Pokud však plochu řízneme nějakou rovinou, tak řezem je křivka, křivku umíme popsat funkcí jedné proměnné—čajník je v kredenci. My budeme řezat rovinami kolmými k osám x a y.

Def. 2.7 *Nechť existuje limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle x v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ či $f'_x(x_0,y_0)$. Analogicky definujeme parciální derivaci podle y. Nechť existuje limita

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle y v bodě $[x_0;y_0]$, značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ či $f'_y(x_0,y_0)$. Má-li funkce parciální derivaci podle nějaké proměnné v každém bodě nějaké oblasti M, potom říkáme, že zde má parciální derivaci. Jinými slovy vznikne na této oblasti nová funkce, to je stejné jako u funkce jedné proměnné.

Protože jsme parciální derivace definovali jako derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně všechna pravidla tak jak je znáte z kurzu MA1, nebudu je tedy uvádět. Stejně tak nebudu řešit derivace vyšších řádů, tam ovšem jeden problém přece jen vyvstane. Záleží na pořádí proměnných podle kterých derivujeme nebo nezáleží, to je oč tu běží. Odpověď nám dává Schwarzova věta.

Věta 2.4 *Nechť jsou derivace $f''_{xy}(x, y)$ a $f''_{yx}(x, y)$ jsou v bodě $M[x_0; y_0]$ spojité. Pak jsou si rovny.*

Obdobnou větu bychom mohli zformulovat i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů. Jak vidíme, u spojitých funkcí je to s parciálními derivacemi jako s mušketýry, je jich o jednu víc než je jejich řád. Stejně jako tři mušketýři byli čtyři, tak i třetí parciální derivace jsou čtyři: f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyy} a f'''_{yyy}. Tak je tomu u parciálních derivací jakéhokoliv řádu.

Příklad 2.7 *Je-li $z = u(x) + v(y)$, je $z'_x = u'(x)$, $z'_y = v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)$, $z''_{yy} = v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$. Tak je-li $z = 3x^2 - 5y^3 + 1$, máme $z'_x = 6x$ a $z'_y = -15y^2$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 6$, $z''_{yy} = -30y$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$.*

Příklad 2.8 *Je-li $z = u(x)v(y)$, je $z'_x = u'(x)v(y)$, $z'_y = u(x)v'(y)$, $z''_{xx} = u''(x)v(x)$, $z''_{yy} = u(x)v''(y)$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = u'(x)v'(y)$. Tak je-li $z = 5x^2y^4$, máme $z'_x = 10xy^4$ a $z'_y = 20x^2y^3$. Pro druhé derivace vychází $z''_{xx} = 10y^4$, $z''_{yy} = 60x^2y^2$ a $z''_{xy} = z''_{yx} = 40xy^3$.*

Příklad 2.9 *Je-li $z = \frac{u(x)}{v(y)}$, je $z'_x = \frac{u'(x)}{v(y)}$, $z'_y = -\frac{u(x)v'(y)}{v^2(y)}$, $z''_{xx} = \frac{u''(x)}{v(y)}$, $z''_{yx} = z''_{yx} = -\frac{u'(x)v'(y)}{v^2(y)}$ a $z''_{yy} = -u(x)\frac{v''(y)v(y) - 2(v'(y))^2}{v^3(x)}$. Konkrétní příklad dáme tento: $z = \frac{x}{y^2}$. Potom je $z'_x = \frac{1}{y^2}$, $z'_y = \frac{-2x}{y^3}$, $z''_{xx} = 0$, $z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}$ a $z'' = \frac{-2}{y^3}$.*

Pkud nejsou proměnné separovány, postupujeme standardně.

Příklad 2.10 *Určete první a druhé derivace funkce $z = \sin(x^2 + y^2)$. Máme $z'_x = 2x\cos(x^2 + y^2)$, $z'_y = 2y\cos(x^2 + y^2)$. Derivujeme jako součin a máme $z''_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2\sin(x^2 + y^2)$ a $z''_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2\sin(x^2 + y^2)$. Při smíšené vyjdeme z y'_x a derivujeme podle y, x je konstanta. Obdržíme $z''_{xy} = -4xy\sin(x^2 + y^2$*

2.3 Totální diferenciál

Podobně jako u funkce jedné proměnné zavedeme pojem diferenciál. Samozřejmě, že můžeme pro parciální derivace definovat parciální diferenciály naprosto stejným způsobem jako u funkce jedné proměnné. Jenže probíráme funkci dvou proměnných, takže není dobré, aby si jednotlivé proměnné hrály na svém písečku. Chápu, že slovo totální nemá dnes nejlepší pověst, leč matematika je na politické situaci nezávislá. Kdo by s tím měl problém, nechť si místo slova totální myslí ekvivalentní výrazy (úplný, celkový).

Def. 2.8 *Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná (má zde totální diferenciál), je-li*

$$\Delta z = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + \varrho\tau(h,k),$$

kde A, B jsou konstanty, $\varrho = \sqrt{h^2+k^2}$ a $\lim\limits_{[h;k]\to[0;0]} \tau(h,k) = 0$.

Na otázku kdy to nastane nám dá odpověď následující věta.

Věta 2.5 *Je-li $f(x_0,y_0)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0).$$

Poznámka 2.3 *Dále budeme používat běžné označení $h = dx$, $k = dy$.*

Def. 2.9 *Je-li funkce $f(x,y)$ v boděM$[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak výraz*

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)dy$$

nazýváme totální diferenciál funkce $z = f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$

Věta 2.6 *Nechť $f(x,y)$ je v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, pak je zde spojitá.*

Věta 2.7 *Jsou-li první parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ spojité, pak je zde diferencovatelná.*

Hlavní význam diferenciálu funkce jedné proměnné spočíval v tom, že jsme mohli (skutečný) přírůstek funkce v bodě nahradit s jistou chybou diferenciálem, čili graf funkce nahradit v okolí tohoto bodu tečnou. Obdobně lze postupovat i u funkce dvou proměnných, jen tečnu nahradíme tečnou rovinnou. Jak stanovit její rovnici nám ukáže další věta.

Věta 2.8 *Je-li $f(x,y)$ v bodě $M[x_0;y_0]$ diferencovatelná, má plocha $z = f(x,y)$ v bodě $M_p[x_0;y_0;z_0]$ tečnou rovinu, jejíž rovnice má tvar*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)(y-y_0)$$

Menší zádrhel spočívá v tom, že tak jako neumíme (neurčitě) integrovat libovolnou funkci, ne každý výraz tvaru $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je diferenciálem nějaké funkce. Kdy tomu tak je nám odpoví následující věta.

Věta 2.9 *Nechť funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité v oblasti O a stejně tak jsou zde spojité i jejich parciální derivace. Pak výraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je totálním diferenciálem jisté funkce $f(x,y)$ právě tehdy, když platí*

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y).$$

Užití diferenciálu si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.11 *Válec má poloměr 2 dm a výšku 10 dm. Jak se změní jeho objem, jestliže se při deformaci poloměr zvětší na 2,05 dm a výška naopak zmenší na 9,8 dm? Objem válce je* $V = \pi r^2 v$*, což lze chápat jako funkce dvou proměnných* r *a* v*. Totální diferenciál má tvar*

$$dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv$$

Zde je $dr = +0,05$ *a* $dv = -0,2$*. Po dosazení do diferenciálu máme* $dV = 1,2\pi \doteq 3,77\mathrm{dm}^3$*.*

Příklad 2.12 *Ověřte, zda výraz* $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$ *je totálním diferenciálem této funkce. V případě že ano, nalezněte tuto funkci. Ověření nebude těžké, neboť* $P'_y = -2xy = Q'_x$*. Na nalezení funkce, jejíž totální diferenciál jsme právě objevili, vám poradím jednu inženýrskou fintu. Zintegrujeme obě části dle patřičné proměnné, přičemž tu druhou budeme považovat za konstantu.*

$$\int (2x^3 - xy^2)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$\int (2y^3 - x^2y)dy = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

Do hledané funkce $z = f(x,y)$ *vezmeme první integrál celý, z druhého pak vezmeme pouze ty sčítance, které se v prvním nevyskytují. Je tedy*

$$z = \frac{1}{2}(x^4 - x^2y^2 + y^4) + c$$

Totální diferenciál je velmi důležitý pojem ve fyzice. Je-li výraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ totální diferenciál, pak ho lze integrovat, přičemž hodnota tohoto integrálu nezávisí na integrační cestě z bodu A do bodu B, nýbrž pouze na hodnotách funkce $z = f(x,y)$ v těchto bodech (je to jakoby klasický Newtonův integrál). Funkce z pak reprezentuje veličinu stavovou.

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat totální diferenciál řádu n.

Def. 2.10 *Totální diferenciál řádu* n *funkce dvou proměnných je výraz*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$$

Jak postupovat si ukážeme na příkladě.

Příklad 2.13 *Určete totální diferenciály druhého a třetího řádu funkce* $z = y\ln x$*. Nejdříve si určíme všechny parciální derivace až do řádu 3.* $z'_x = \frac{y}{x}$, $z'_y = \ln x$, $z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$, $z''_{xy} = \frac{1}{x}$, $z''_{yy} = 0$, $z'''_{xxx} = \frac{2y}{x^3}$, $z'''_{xxy} = -\frac{1}{x^2}$, $z'''_{xyy} = z'''_{yyy} = 0$*. Totální diferenciál druhého řádu je*

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2 = -\frac{y}{x^2}(dx)^2 + \frac{2}{x}dxdy(dy)^2$$

Totální diferenciál třetího řádu je pak

$$d^3z = z'''xxx(dx)^3 + 3z'''_{xxy}(dx)^2dy + 3z'''_{xyy}dx(dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3 = \frac{2y}{x^3}(dx)^3 - \frac{3}{x^2}(dx)^2dy$$

2.3.1 Extrémy funkce dvou proměnných

Def. 2.11 *Řekneme, že funkce $f(x,y)$ má v bodě $M[x_0;y_0]$ lokální maximum (minimum), existuje-li okolí O bodu M takové, že pro všechna $x \in O$ platí $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ ($f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$. V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu).*

Postup při stanovení extrémů je obdobný jako u funkce jedné proměnné.

Věta 2.10 *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $M[x_0;y_0]$ lokální extrém a nechť existují v bodě M parciální derivace prvního řádu. Pak je $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$.*

Poznámka 2.4 *Tak jako u funkce jedné proměnné budeme bod M nazývat bodem stacionárním.*

Stacionární (podezřelé z extrému) body budeme vyšetřovat pomocí následující věty.

Věta 2.11 *Nechť M je stacionární bod a nechť v jeho okolí existují spojité parciální derivace prvního a druhého řádu. Vypočtěme výraz*

$$D = f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2$$

Je-li $D > 0$, pak pro $f''_{xx} > 0$ je v bodě M lokální minimum a pro $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ je v bodě M lokální minimum. Je-li $D < 0$, pak v bodě M extrém není, je-li $D = 0$, nemůžeme o extrému rozhodnout (extrém tady být může, ale nemusí).

Poznámka 2.5 *Označení D jsme nezvolili náhodou, D je de facto determinant druhého řádu, přičemž v hlavní diagonále jsou derivace podle xx a yy a ve vedlejší diagonále jsou derivace smíšené (ty jsou si samozřejmě rovny).*

Nyní ukážeme několik příkladů.

Příklad 2.14 *Nalezněte lokální extrémy funkce $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$. Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu.*

$$f'_x = 3x^2 + y^2 + 12x, \qquad f'_y = 2xy + 2y$$

. Položíme-li tyto derivace rovny nule, získáme čtyři stacionární body $S_1[-1;3]$, $S_2[-1;-3]$, $S_3[0;0]$ a $S_4[-4;0]$. Spočteme tedy parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx} = 6x + 12, \qquad f''_{xy} = 2y, \qquad f''_{yy} = 2x + 2.$$

Budeme postupně dosazovat jednotlivé stacionární body a počítat číslo D. V prvních dvou případech je $D(S_1) = -36$, $D(S_2) = -36$, extrém nenastává. $D(S_3) = 24$ a protože je $f''_{xx}(0,0) = 12$, je v počátku minimum. Naproti tomu je $D(S_4) = 24$, ale tentokrát je $f''_{xx}(-4,0) = -12$, v bodě S_4 je tedy maximum.

Příklad 2.15 *Určete lokální extrémy funkce* $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$. *Začneme prvními parciálními derivacemi.*

$$z'_x = 2x + 4y - 2 \qquad z'_y = 4x + 12y + 8$$

Opět položíme obě derivace rovny nule, po vyřešení soustavy dvou lineárních rovnic získáme jediný stacionární bod $S[7; -3]$. *Druhé parciální derivace jsou* $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 4$ *a* $z''_{yy} = 12$. *Všechny jsou konstantní, není kam dosazovat a determinant má univerzální hodnotu* $D = 8 > 0$. *Jelikož je* $z''_{xx} = 2 > 0$, *je v bodě* S *lokální minimum. Jen pro zajímavost, jeho hodnota je* $z(7, -3) = -24$.

Příklad 2.16 *Určete lokální extrémy funkce* $z = -3x^4 - 5y^4$. *Spočteme první derivace* $z'_x = -12x^3$, $z'_y = -20y^3$. *Jediným stacionárním bodem je počátek. Jdeme na druhé derivace.* $z''_{xx} = -36x^2$, $z''_{yy} = -60y^2$, $z''_{xy} = 0$. *Zřejmě je* $D = 0$, *o extrému nemůžeme tímto způsobem rozhodnout. My si ale všimneme, že funkční hodnoty jsou mimo počátek záporné, je zřejmé, že v počátku bude maximum.*

Tak jako u funkce jedné proměnné můžeme určovat i extrémy absolutní, a to v případě, že je funkce definovaná na uzavřené oblasti. Ty pak mohou nastat buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici oblasti. Ukážeme si to na příkladu, nejdříve trochu teorie.

Def. 2.12 *Řekneme, že funkce* $f(x, y)$ *má v bodě* $[x_0; y_0]$ *absolutní maximum (minimum), jestliže pro všechny body* $[x; y] \in M$ *platí* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$.

Def. 2.13 *Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnitřním bodem množiny* M, *existuje-li okolí* O *tohoto bodu takové, že* $O \subset M$. *Množina, která obsahuje pouze vnitřní body, se nazývá otevřená. Bod* $[x_0; y_0]$ *nazveme vnějším bodem množiny* M, *jestliže každé jeho obsahuje jak body množiny* M, *tak i body, které do ní nepatří. Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí. Množina, která obsahuje všechny své hraniční body, se nazývá uzavřená.*

Def. 2.14 *Množina* M *se nazývá omezená, existuje-li kruh* K *se středem v počátku tak, že* $M \subseteq K$.

Věta 2.12 *Nechť* $f(x, y)$ *je spojitá funkce definovaná na omezené uzavřené množině. Pak zde nabývá své nejmenší a největší hodnoty.*

Příklad 2.17 *Stanovte absolutní extrémy funkce* $z = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$. *Po doplnění na čtverec zjistíme, že definičním oborem jsou vnitřní a hraniční body elipsý* $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$. *Stacionární body určíme řešením soustavy rovnic*

$$z'_x = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0 \qquad z'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0$$

Existuje jediný stacionární bod $S[1; 0]$. *Je* $f(1, 0) = 1$. *Stanovení extrémů na hranici je obecně velmi obtížné, vezmeme-li rozum do hrsti, tak vidím,e že funkce je na hranici rovna nule a jinak je kladná. Absolutní maximum je tedy ve středu elipsy a minimun na její hranici.*

Literatura

[1] Štěpánský V.: Diferenciální rovnice. Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1951

[2] Kuben J.,: Obyčejné diferenciální rovnice. Nakladatelství Univerzity Palackého, Olomouc 1995