$f(x)$ $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}$

F prim. fce.

$\boxed{F'(x)=f(x)}$

Diferenciální rovnice

$\boxed{x^2-4x+1=0}$

$x_{1,2} = \dots$

$A(x)=b$

A matice $x=?$ $x\in R^n$

$y=?$

$y(x)+y'(x)=x$ diferenciální rovnice

pro každé $x\in I\subset R$.

$y^2(x)+x^2=9$ není diferenc. (neobsahuje y')

$$\boxed{F(x,y(x),y'(x),\dots y^{(n)}(x))=0}$$ o.d.r.

n

$y''(x)+y'(x)-y(x)=2$ rovnice 2. ř.

$u=u(x_1,\dots x_n)$ $u(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x),\dots$ (vyšš. ř.)

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$y=y(x)$ $x\in R^1$ obyčejná d.r.

$$\begin{cases} y_1'(x)=y_2(x), \\ y_2'(x)=-y_1'(x)+1 \end{cases}$$

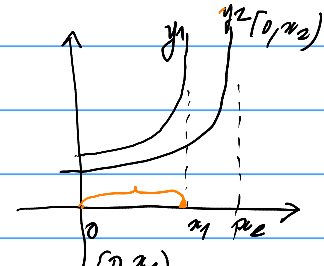
soustava o.d.r. (2 rovnice) (y_1,y_2)

$F(x,y(x),y'(x))=0$ o.d.r. 1. ř.

$y=y(x)$ x nezav. pr. y zav. pr. v.

$\left.\begin{matrix} u & D_u \\ u_1 & D_{u_1}\end{matrix}\right\}$ stejný funk. předpis $\Rightarrow$ u, u_1 odlišné fce

Řešení d.r.



$y_2|_{[0,x_1)}$ zúžení y_2 na $[0,x_1)$

$\boxed{y'(x) = x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$0 \cdot y(x) + y'(x) - x = 0$

$y(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$y''(x) = 1$

$\hookrightarrow \dots$ dvě libov. konst.

Obecné řešení

$y' = \frac{dy}{dx}$

$F(x, y, y') = 0$

$y(x)$

$y' = f(x, y)$

$y'(x) = f(x, y(x)),\ x \in I \subset \mathbb{R}^1$

$y' = f(x, y)$

Obecné řešení:

$g(x, y, C) = 0$

kde C je konst.:

pro každé C, $y = y(x) \to y$ splňuje rovnici

lineární rovnice

$\boxed{y'(x) = y(x),}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Je to rovnice diferenciální? ano

Jakého ř.? 1.

O.d.r.? ano ($y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$)

$y(0) = -1$

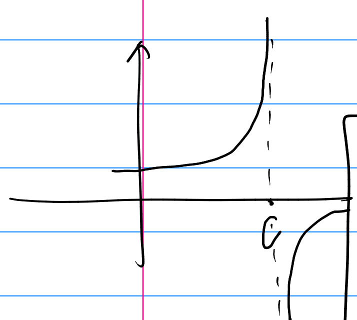
$\to y(x) = -e^x$

$(e^x)' = e^x$

$\boxed{y(x) = C e^x}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

obecné řeš.

je řešením rovnice $y' = y$.



$y(x) = \frac{1}{C-x}$ $\quad x = C: \ \frac{1}{0}\,!$

$x < C: \ y(x) > 0$

$x > C: \ y(x) < 0$

$(y(x))^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2}$

$y'(x) = \left(\frac{1}{C-x}\right)' = -\frac{1}{(C-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(C-x)^2}$

$\boxed{y' = y^2}$: řešením je $y = \frac{1}{C-x}$ pro libovolné C.

nelineární

$y' = f(x, y)$ $\to$ nelineární / $\to$ lineární — pokud f není (je) lineární podle y

„integrovat" o.d.r. = řešit.

(inspirace: $y'(x) = f(x)$

$y(x) = \int f(x)\,dx$)

$y' = y^2$

$y(x_0) = y_0$ — $y_0 \neq 0$ / $y_0 = 0$

dosadíme $x = x_0$ do obecného ř.: $y_0 = \frac{1}{C - x_0}$

$C - x_0 = 1/y_0, \quad C = x_0 + 1/y_0$

$y = \frac{1}{x_0 + 1/y_0 - x}$ – řešení p.ú.

$y = 0$

Separované o.d.r.

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad , \qquad y' = F(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(x)$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$dy = y'\,dx$ – diferenciál prom. y

dx : diferenciál x (nezávislé prom.)

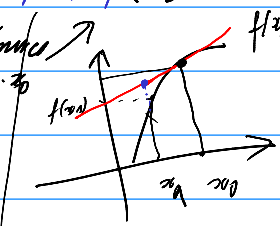
$$dy = f(x)\, g(y)\, dx$$

$$\frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. $f'(x_0)$ směrnice tečny v b. x_0
2. prochází bodem $(x_0, f(x_0))$



$$f(x_1) \doteq \boxed{f(x_0)} + \boxed{f'(x_0)}(x_1 - x_0)$$

$\sqrt{2}$

$x_1 = 2,\quad x_0 = 1$

$$\underbrace{f(x_1) - f(x_0)}_{\text{změna fce}} \doteq f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\text{změna argum.}}$$

Př:

$$y' = y^2 \qquad\qquad y' = \underbrace{1}_{f(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{g(y)}$$

$y = 0$: také řešení

není obsaž. v obecném ř.

zvláštní řeš.

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$dy = y^2\, dx \qquad \frac{1}{y^2}\, dy = dx$$

$y \neq 0 \Rightarrow$

$\int 1\, dx = x$ (+ konst.)

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int dx$$

$$\int y^{-2}\, dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{y^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{y} + C$$

Obdržíme:

obecné řešení

$$-\frac{1}{y} + C = x$$

$y = y(x)$?

$$C - x = \frac{1}{y}, \qquad \boxed{y = \frac{1}{C - x}} \qquad (C \text{ je libovolné})$$

Př: $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$ $\qquad y' = f(x,y)$

$$y'y\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+y^2}$$

$y \neq 0$

$$y' = -\frac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = -\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}}_{g(y)}$$

separovaná rovn.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}, \qquad \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} = \sqrt{1+t} + C = \sqrt{1+y^2} + C.$$

$y^2 = t$

$dt = 2y\,dy$

$$\int (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{(1+t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1+t}$$

(1.) integrál rovnice $\qquad \boxed{\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C}$, kde C je libovolné číslo.

$\|$ $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$ $\qquad$ obecné řešení

Počáteční úloha (= Cauchyova, Cauchyovská)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

— poč. podmínka

... integrální křivka prochází bodem (x_0, y_0).

(= graf řešení)

$y(0) = 1$? $\qquad \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$ — ob. řeš.

$x = 0, y = 1$: $\quad \sqrt{1+0} + \sqrt{1+1} = C$, $\quad 1 + \sqrt{3} = C$.

$y' = f(x,y)$ o. d. r. 1. ř.

$y(x_0) = y_0$ poč. úloha (= Cauchy)

$y' = y$

$y = C\cdot e^{x}$ C libov. konst.

obecné řešení

$y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$ obecné řeš.?

$(e^{ax})' = e^{ax}\cdot a$

$y = C e^{ax}$ obecné řeš.

$\frac{dy}{dx} = ay$ separovaná d. r.

$\underset{f(x)}{a}\cdot \underset{g(y)}{y}$

$\frac{dy}{y} = a\,dx$, $\int \frac{dy}{y} = a\int dx$

$\ln|y| = ax + \tilde{C}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}$

$e^{\ln|y|} = e^{ax+\tilde{C}}$

$|y| = e^{ax}\cdot e^{\tilde{C}}$, $e^{\tilde{C}} > 0$

$y = \pm e^{\tilde{C}} e^{ax}$

$C \in \mathbb{R}$

$\boxed{y = C\cdot e^{ax}}$

$\boxed{y(0) = C}$

jediné řešení poč. úlohy

f, f^{-1}

$f(x) = y$

$x \xrightarrow{f} y$

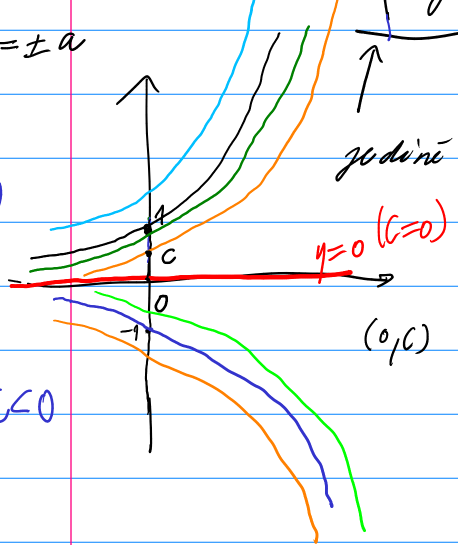
$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pro všechna } x, y \text{ (z oboru)}}$

$a = b.$

$e^a = e^b$

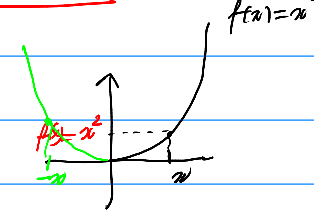
$x^2 = a^2$

$x = \pm a$



$x \geq 0$

$g(t) = \sqrt{t}$ $f(x) = x^2$



$g(\underbrace{f(x)}_{x^2}) = \sqrt{x^2} = x$

$f(\underbrace{g(t)}_{\sqrt{t}}) = (\sqrt{t})^2 = t$

$f(x) = \ln x$, $g(t) = e^t$

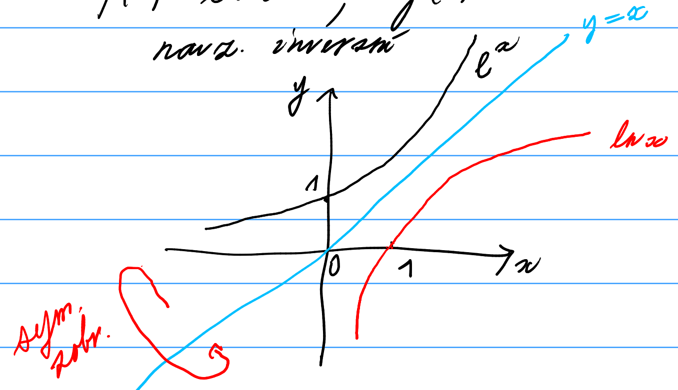
navz. inverzní

$e^x = y$

$x = \underline{\ln e^x} = \ln y$

$\boxed{x = \ln y}$

$x = x(y)$



$$y' = ay \qquad y = Ce^{ax} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$y = y(x)$

$$y' = a(x) \cdot y \qquad a = a(x) \ \text{(funkce)}$$

také separ. rovnice

$y' = f(x,y)$, kde f je lineární podle y

~~lineární~~ o. d. r. 1. ř.

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y + b(x)}$$

lineární homogenní: $b \equiv 0$

$b \neq 0$: nehomogenní

Lineární homogenní rovnice 1. ř.:

$$y' = a(x)\, y$$

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot y, \qquad \frac{dy}{y} = a(x)\,dx, \qquad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$$

$$\ln|y| = \int a(x)\,dx + \tilde{C}$$

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{\int a(x)\,dx + \tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{C \in \mathbb{R}} \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{\int a(x)\,dx}}$$

obecné řešení homog. lineární rovnice $y' = a(x) \cdot y$

spec. případ: $a(x) = a \in \mathbb{R}$ (konst.)

$$y = Ce^{ax}$$

$$y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

$x = x_0$: $\underbrace{y(x_0)}_{y_0} = C e^{\int_{x_0}^{x_0} \dots} = Ce^0 = C \Rightarrow C = y_0$

Poč. úloha

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = a(x) \cdot y \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$$

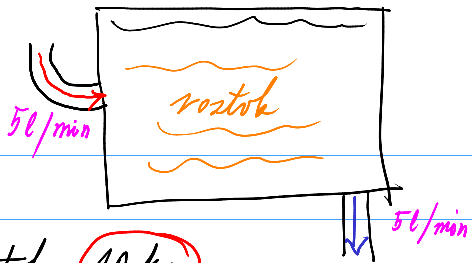
(řešení proch. bodem (x_0, y_0))

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx$$

$$\boxed{y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}}$$

$y = ?$ $\qquad C = ?$

Př.



Množství soli v nádrži za 1 hod = ?

100 l

solný roztok, 10 kg poč. podmínka $\longrightarrow$ $y(0)=10$

t čas (nezav. proměnná) (min.)

$y(t)$ – množství NaCl v nádrži (kg)

$t : y(t)$ $\qquad t+\Delta t : y(t+\Delta t)$

$5\cdot\Delta t$ litrů vyteče za Δt min.

$\frac{5y(t)}{100}\cdot\Delta t$ – tolik soli se dostane ven z nádrže

koncentrace NaCl

$$y(t) - y(t+\Delta t)$$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = -\frac{5}{100}\Delta t\cdot y(t)$$

$$y(t+\Delta t) - y(t) = -\frac{1}{20}y(t)\,\Delta t$$

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{20}\cdot y(t)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = y'(t)$$

$$\lim_{s\to t}\frac{y(s)-y(t)}{s-t} = y'(t)$$

limita pro $\Delta t\to 0$:

$$\boxed{y'(t) = -\frac{1}{20}\cdot y(t)}$$

$$\boxed{y(60) = C\cdot e^{-3} = 10\cdot e^{-3}\,(\text{kg}) \quad e \doteq 2{,}7}$$

$y' = a\cdot y$ $\qquad a = -\frac{1}{20}$ (konst.)

lineární d. r. z konst. koef. – homogenní

$y = C\cdot e^{at}$ – obecné řeš.

Poč. podmínka: $y(0)=10$ – na začátku bylo 10 kg.

$y(60)$ – množství soli v roztoku za 1 hod. (začínáme v $t=0$)

(60 min)

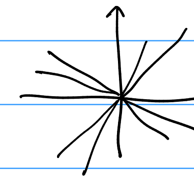
$y(60)=?$ $\quad y(60) = Ce^{60a} = Ce^{-\frac{60}{20}} = Ce^{-3}$. $y(0)=10$;

$y=C\cdot e^{-\frac{1}{20}t}$ – tak se vyvíjí $y(t)$

$y(0)=10$: $10 = Ce^{0}$ $\quad \boxed{C=10}$

$y' = a(x)\cdot y$ lineární homogenní

$y = C e^{\int a(x)\,dx}$ — obecné řešení



např. $a(x) = \frac{1}{x}$

lineární hom. (separov.) homogenní

$\left[\; y' = \frac{y}{x} \right.$

$y = C e^{\int \frac{dx}{x}} = C e^{\ln|x|} = C|x|$

$y = Cx$ [kontrola: $y' = C$ = $\frac{1}{x}\cdot y = \frac{1}{x}\cdot Cx = C$ platí]

není lineární, není separov., homogenní

$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (g - \text{nějaká funkce}) \quad \text{homogenní rovnice}}$$

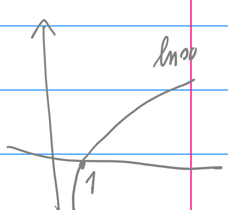
$\frac{y}{x} = u$, u – nová zav. prom.

$y = xu$, $y' = (xu)' = \underbrace{x'u}_{1\cdot u} + xu' = u + xu'$ — dosadíme

$x' = \frac{dx}{dx} = 1$

$u + xu' = g(u)$, $xu' = g(u) - u$, $u' = \frac{g(u) - u}{x}$

Potom řešíme $xu' = g(u) - u$ jako separovaná separ. rovn. a násl. dosadíme $u = \frac{y}{x}$ (= návrat k proměnné y).



$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$

$$\boxed{y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$\underline{g(u)} = u - u^3$ (je homogenní)

~~$y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^2}$~~ – nejde

~~$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot y$~~

$\frac{y}{x} = u$, $y = ux$, $y' = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} - u^3$

$u'x = -u^3$ separovaná

$\frac{du}{dx}x = -u^3$, $\frac{du}{u^3} = -\frac{dx}{x}$

$\int u^{-3}du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{u^{-2}}{-2}$

$\int \frac{du}{u^3} = -\int \frac{dx}{x}$, $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2} = -\ln|x| + \tilde{C} = -\ln|x| + \ln C$, $C > 0$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2} = \ln\frac{C}{|x|}$, $u^2 = -\frac{1}{2\ln C/|x|}$, $\frac{y}{x} = u$

$\frac{y^2}{x^2} = -\frac{1}{2\ln\frac{C}{|x|}}$, $y^2 = -\frac{x^2}{2\ln\frac{C}{|x|}}$

$y' = a(x)y + b(x)$ lineární rovn. 1. ř. (nehomog.)

Metoda variace konstanty :

homog. rovnice : $y' = a(x)\,y$, obecné řeš. $y = C\,e^{\int a(x)dx}$