Lineární nehom. o.d.r. 1.ř.

$y' = a(x)y + b(x)$ lineární rovn. 1.ř. (nehomog.)

určeno členem $b(x)$

Metoda variace konstanty:

homog. rovnice: $y' = a(x)y$, obecné řeš. $y = C\cdot e^{\int a(x)dx}$

obecné řeš. homog. rovn.

$y = y_0 + y_1$

y_1 … partikul. řeš. nehom. rovnice

hledáme řešení ve tvaru

$$y = C(x)\cdot e^{\int a(x)dx}$$

Dosadit:

$$y' = C'(x)e^{\int a(x)dx} + C(x)e^{\int a(x)dx}\cdot\left(\int a(x)dx\right)'$$

$$= C'(x)e^{\int a(x)dx} + \cancel{a(x)C(x)e^{\int a(x)dx}} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} a(x)\cdot \boxed{\cancel{C(x)e^{\int a(x)dx}}} + b(x)$$

$$C'(x)e^{\int a(x)dx} = b(x)$$

$$C'(x) = b(x)\,e^{-\int a(x)dx}$$

$$C(x) = \int b(x)\,e^{-\int a(x)dx}\,dx$$

dosadit do vzorce

Př. $y' = -y + x$ — lineární o.d.r. 1.ř. s konstantním koeficientem (nehomogenní)

$y' = a(x)\cdot y + b(x)$, $a(x) = -1$, $b(x) = x$

$\boxed{y' = -y} + x$

hom. r. $y' = -y$, obec. řeš. homog. r.: $\boxed{y = Ce^{-\int dx} = Ce^{-x}}$

C libov. konst.

variace konst. pro nehom.: hledáme

$$y = C(x)e^{-x}$$

Př. $\quad y' = xy + 1$ (nehomog. rovnice 1. ř. s proměnným koef. $a(x) = x$)

Sestrojme odpov. homogenní rovnici:

hom. r. $y' = xy$, ob. řeš. $y = C e^{\int x\,dx} = C e^{\frac{x^2}{2}}$

Řešení nehomogenní rovnice nalezneme pomocí metody variace konstanty: hledáme y ve tvaru

$$y = C(x) e^{\frac{x^2}{2}}$$

Potom

$$y' = C'(x) e^{\frac{x^2}{2}} + C(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' = C'(x) e^{\frac{x^2}{2}} + x\,C(x)\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

Dosadíme do rovnice:

$$\underbrace{C'(x) e^{\frac{x^2}{2}} + \cancel{x\,C(x) e^{\frac{x^2}{2}}}}_{y'} = \cancel{x \cdot \underbrace{C(x) e^{\frac{x^2}{2}}}_{y}} + 1$$

$$C'(x)\, e^{\frac{x^2}{2}} = 1, \qquad C'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{potom}$$

$$C(x) = \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$ (integrál nelze vyjádřit pomocí element. funkcí)

Dosadíme do vzorce $y = C(x) e^{\frac{x^2}{2}}$; obecné řešení nehom. r. je:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(neurč. integrál obsahuje konst. integrování)

Př.

$$y' = -y + x \qquad\qquad y = C(x)e^{-x}$$

$$y' = C'(x)e^{-x} + C(x)e^{-x}(-1) = \boxed{C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}}$$

$$-y + x = \boxed{-C(x)e^{-x} + x}$$

$$y = C(x)e^{-x} = (x-1)\cancel{e^{x}}\cancel{e^{-x}} = x-1$$

Musí platit: $C'(x)e^{-x} - \cancel{C(x)e^{-x}} = -\cancel{C(x)e^{-x}} + x$

$C'(x)e^{-x} = x$, $\quad C'(x) = xe^{x}$

$$C(x) = \int xe^{x}\,dx = \int x\,d(e^{x}) = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} = e^{x}(x-1)$$

„per partes" (konst. integr. volíme $=0$)

$y = $ [obecné řeš. hom. rovn.] + [part. řeš. nehom. r.] $=$

$= Ce^{-x} + x - 1$

$y_1 = x-1$ partik. řešení $\qquad y_1' = 1$

$y' = -y + x$

$1 = 1 - \cancel{x} + \cancel{x}$

o.k.

Poč. úloha: $\qquad y' = a(x)y + b(x)$

$y(x_0) = y_0$ — obecné řešení (obsahuje konst. C)

$C = ?$ $y(x_0) = y_0$, rovnice pro určení C

$C = \ldots \to$ dosadit do obec. řeš.

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

(poč. úloha)

Obecné řeš.: $y = Ce^{-x} + x - 1$

$y(1) = 2$:

$2 = Ce^{-1} + \cancel{1} - \cancel{1}$

$2 = \frac{c}{e}$, $c = 2e$. Potom řešením poč. úlohy $y(1)=2$ je: $\boxed{y = 2e\cdot e^{-x} + x - 1}$

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y = C e^{\int a(x)\,dx}}$$

$$y(x) = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

$$x = x_0:\ y_0 = C \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x_0} \cdots}}_{e^0 = 1} = C, \quad C = y_0.$$

$$\boxed{y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}}$$

řešení počáteční úlohy

$$y(x) = C e^{\int (-1)\,dx} = C e^{-x}$$

dosadíme nalezenou hodnotu C

$x = x_0$: $y(x_0) = C e^{-x_0}$; aby platilo $y(x_0) = y_0$, musí být C takové, že $C e^{-x_0} = y_0$, tj. $C = e^{x_0} \cdot y_0$

Proto řešení poč. úlohy je

$$y(x) = y_0 e^{x_0} e^{-x}, \quad \text{tj.}$$

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{x_0 - x}.}$$

(kontrola: $y' = y_0 e^{x_0 - x} \cdot (-1) = -y_0 e^{x_0 - x} = -y$ – rovnice je splněna; $y(x_0) = y_0 e^{x_0 - x_0} = y_0 e^0 = y_0$ – poč. podmínka také)

Např. $\begin{cases} y' = -y, \\ y(-1) = \frac{3}{2} \end{cases}$

použijeme vzorec

potom $y(x) = \frac{3}{2} e^{-1-x} = \frac{3}{2} e^{-1} e^{-x} = \frac{3}{2e} e^{-x}.$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x)$ o. d. r. 2. ř. (nehom.)

$y = y_0 + y_1$

y_0 … obecné řeš. hom. r. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

y_1 … part. řeš. nehomogenní rovnice

dosadíme do rovnice

$y'' - y = 0$; $y = C_1 e^x$ $(y' = e^x, y'' = e^x)$

$y = C_2 e^{-x}$ $(y' = -e^{-x}, y'' = e^{-x})$

rovnice je lineární $\Rightarrow$ $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$ je také řešení pro libovolná C_1, C_2.

dosadíme do rovnice

$y'' + y = 0$; $y = C_1 \sin x$ $(y' = \cos x, y'' = -\sin x)$

$y = C_2 \cos x$ $(y' = -\sin x, y'' = -\cos x)$

komplexní: e^{ix}

rovnice je lineární $\Rightarrow$ $\boxed{y = C_1 \underbrace{\sin x}_{y_1} + C_2 \underbrace{\cos x}_{y_2}}$ je také řeš.

Obecně platí: pro lineární homog. o. d. r. 2. ř. obecné řešení má tvar

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

kde y_1, y_2 je dvojice lineárně nezáv. řešení.

Homog. rovn. 2. ř. o konst. koef.

$y'' + py' + qy = 0$ p, q konst.

Hledáme: $y = e^{\lambda x}$; potom (dosadit).

$y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

musí platit: $\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0$$

$e^{\lambda x}\neq 0$, potom λ musí splňovat

$$\boxed{\lambda^2+p\lambda+q=0}$$

charakteristická rovnice

1. ř.:

$y'=ay$

$y=e^x$: $y'=e^x$ $\quad y'=y$

$y=\boxed{e^{ax}}$; $y'=ae^{ax}=ay$

zkusit $y=e^{\lambda x}$: $y'=\lambda e^{\lambda x}$

$\lambda e^{\lambda x}=a e^{\lambda x}\Rightarrow \lambda=a$

2. ř. $\Rightarrow$ charakt. rovnice je kvadratická

Možné př.:

1. λ_1,λ_2 jednoduché reálné kořeny
$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$
2. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ (2. ~~nás~~ k.)
$$y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$$
3. $\lambda=\alpha\pm i\beta$ – komplexní
$$e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta x}$$
$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\cdot\sin\beta x$$
Dvojice l. nez. řeš. (reálných):
$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$
$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Př. $\quad 2y''-5y'+2y=0$ $\quad$ o. d. r. 2. ř. lin. homog.

Hledáme y ve tvaru $y(x)=e^{\lambda x}$; derivujeme (podle x)

$y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2e^{\lambda x}$; dosazujeme:

$2\cdot\lambda^2e^{\lambda x}-5\cdot\lambda e^{\lambda x}+2\cdot e^{\lambda x}=0$

$e^{\lambda x}\cdot(2\lambda^2-5\lambda+2)=0$

Pro λ musí platit $\quad 2\lambda^2-5\lambda+2=0$ $\quad$ (charakter. rovn.)

$$\lambda=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{4}=\frac{5\pm3}{4}\;\begin{matrix}2\\ \frac{1}{2}\end{matrix}$$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$ – dvojice jednoduchých kořenů (R)

Obecné řeš. $\quad y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$, C_1,C_2 libov.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

konst. koef.: $y'' + py' + qy = f(x)$: nehomogenní

metodou variace konst.

Homog. rovnice: $y'' + py' + qy = 0$

obec. řeš. hom. r. : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

(y_1, y_2 l. nez. řeš.)

variace konstanty: hledáme

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

$$y' = \boxed{\underbrace{C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2}_{=0}} + C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$$

$$y'' = C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2''$$

$$\underbrace{C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \boxed{C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2''}}_{y''} + p(x)\cdot\big(\underbrace{C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'}_{y'}\big) + q(x)\big(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2\big) = f(x)$$

$$\begin{cases} y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

↳ soustava rovnic pro určení C_1' a C_2'

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Charakt. rovnice bude: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ $\quad \lambda = 2 \pm i$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm i2}{2} = 2 \pm i$$

$\boxed{\lambda_1 = 2+i, \quad \lambda_2 = 2-i}$ – dvojice kompl. sdr. kořenů

$\lambda = \alpha \pm i\beta$

řeš.

$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$

$\alpha = 2, \ \beta = 1$

$y_1 = e^{2x}\cos x, \quad y_2 = e^{2x}\sin x$

Obecné řeš. bude:

$$y(x) = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x = $$
$$= e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2 \sin x\right)$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Char. rovnice je: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (náS. 2)

$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = x e^{3x}$

$$\Big[\ y_2' = e^{3x} + 3xe^{3x}, \quad y_2'' = 3e^{3x} + 3\left[e^{3x} + 3xe^{3x}\right] =$$
$$= 3e^{3x} + 3e^{3x} + 9xe^{3x} = 6e^{3x} + 9xe^{3x}$$
$$\underbrace{6e^{3x} + 9xe^{3x}}_{y''} - 6\cdot\underbrace{\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right)}_{y'} + 9\cdot\underbrace{xe^{3x}}_{y}$$
$$= \cancel{6e^{3x}} + \cancel{9xe^{3x}} - \cancel{6e^{3x}} - 18xe^{3x} + 9xe^{3x} = 0\ \Big]$$

Obecné řeš.

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$
$$\boxed{y(x) = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right)}$$