1. Určete vzájemnou polohu rovin α, β, případně průsečnici

$\alpha: 2x - 5y + 4z - 10 = 0$

a) $\beta: 4x - 10y + 8z - 10 = 0$

$n_\alpha = (2, -5, 4)$

$n_\beta = (4, -10, 8) = 2 \cdot n_\alpha \rightarrow$ rovnoběžné, nebo totožné

$\alpha: 4x - 10y + 8z \underline{- 20} = 0$

$\beta: 4x - 10y + 8z \underline{- 10} = 0$

absolutní člen není shodný, roviny jsou <u>rovnoběžné</u>

b) $\beta: x - y - z - 2 = 0$

$n_\beta = (1, -1, -1) \neq k \cdot n_\alpha \rightarrow$ roviny jsou <u>různoběžné</u>

Řešíme soustavu 2 rovnic o 3 neznámých

$$x - y - z - 2 = 0 \quad / \cdot 4$$
$$2x - 5y + 4z - 10 = 0$$
$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y - 4z - 8 &= 0 \\ 2x - 5y + 4z - 10 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{sečteme}$$
$$6x - 9y - 18 = 0 \quad / : 3$$
$$2x - 3y - 6 = 0$$
$$6t - 3y - 6 = 0$$
$$3y = 6t - 6$$
$$\underline{y = 2t - 2}$$

Dostáváme 1 rovnici o 2 neznámých, za jednu neznámou zvolíme parametr např. $\underline{x = 3t}$, $t \in \mathbb{R}$

Dopočítáme poslední neznámou $3t - (2t - 2) - z - 2 = 0$

$$\underline{z = t}$$

Průsečnicí je přímka p:
$$x = 3t$$
$$y = 2t - 2$$
$$z = t \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) $\beta: 4x - 10y - 2z - 10 = 0$

$n_\beta = (4, -10, -2) \neq k \cdot n_\alpha$ → roviny jsou různoběžné

$$4x - 10y - 2z - 10 = 0$$
$$2x - 5y + 4z - 10 = 0 \quad / \cdot (-2)$$

Řešíme soustavu rovnic jako v b)

$$4x - 10y - 2z - 10 = 0$$
$$-4x + 10y - 8z + 20 = 0$$

Sečteme

$$-10z + 10 = 0$$
$$\underline{z = 1}$$

Po dosazení do rovnic je vidět, že jedna rovnice je násobkem druhé, ve skutečnosti máme tedy pouze jednu rovnici:

$$2x - 5y + 4 - 10 = 0$$
$$2x - 5y - 6 = 0$$

Za jednu neznámou zvolíme parametr, např. $\underline{y = s}$, $s \in \mathbb{R}$

Dosadíme

$$2x - 5s - 6 = 0$$
$$2x = 5s + 6$$
$$\underline{x = \frac{5}{2}s + 3}$$

Průsečnicí je přímka p:

$$p: \begin{aligned} x &= 3 + \frac{5}{2}s \\ y &= s \\ z &= 1 \end{aligned} \qquad s \in \mathbb{R}$$