Repetitorium SŠ matematiky 2 – 2. cvičení

VEKTORY, PŘÍMKA

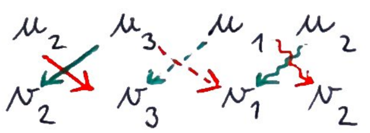
Konzultace k tomuto cvičení proběhne 17. 3. 2021 v MS Teams.

Nejpozději 19. 3. 2021 nahrajte do odevzdávárny v ISu alespoň jeden z příkladů 1–3 a alespoň jeden z příkladů 4–6

Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

- výsledkem je vektor
- leží-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ na jedné přímce (jsou svým násobkem), je $\vec{w} = \vec{o}$ (nulový vektor)
- jestliže $\vec{u}, \vec{v}$ neleží na jedné přímce, pak je $\vec{w}$ kolmý k $\vec{u}$ i k $\vec{v}$, symbolicky $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}$
- výpočet: $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$

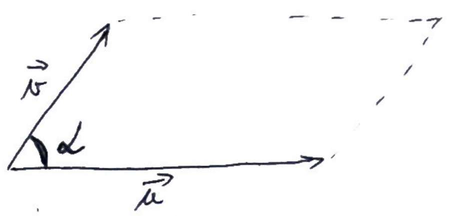
$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2;\ u_3 v_1 - u_1 v_3;\ u_1 v_2 - u_2 v_1)}$$



- vektorový součin není komutativní, platí $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníku určeného původními vektory

$$S = |\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$



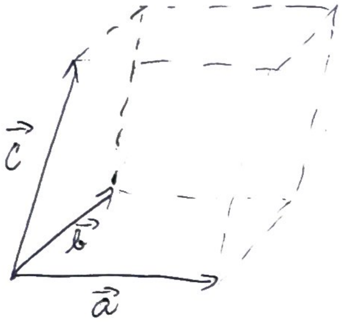
Příklad 1 Určete souřadnice a_2, a_3 vektoru $\vec{a}$ tak, aby platilo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, jestliže $\vec{b} = (3;1;1)$, $\vec{c} = (3;-4;-5)$, $\vec{a} = (1;a_2;a_3)$.

SMÍŠENÝ SOUČIN

- kombinace skalárního a vektorového součinu

$$\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}$$

- určuje objem rovnoběžnostěnu vymezeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



- nezáleží na tom, kterou stěnu uvažujeme jako základnu, proto

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

- z vlastností vektorového součinu plyne, že objem V rovnoběžnostěnu je buď $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ nebo $V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Příklad 2 Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu KLMNOPQR, je-li $K[2;3;-1]$, $L[8;4;-2]$, $M[0;6;0]$, $O[2;1;4]$

Příklad 3 Vypočítejte souřadnice bodu Z ležícího na ose z, aby platilo, že objem čtyřstěnu $ABCZ$ je 14. $A[2;-3;1]$, $B[1;0;3]$, $C[3;1;-1]$

Nápověda: určete poměr objemu čtyřstěnu $ABCZ$ a rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AZ}$.

PŘÍMKA

Přímka je plně určená
- dvěma body
- bodem a vektorem
- jako průsečnice dvou různoběžných rovin (pouze v prostoru)

Existuje několik způsobů, jak přímku vyjádřit:

- parametrické vyjádření přímky
- obecná rovnice přímky
- směrnicový tvar rovnice přímky
- úsekový tvar rovnice přímky

$\left.\begin{array}{l}\text{parametrické vyjádření přímky}\\ \text{obecná rovnice přímky}\end{array}\right\}$ nejužívanější

Parametrické vyjádření přímky

- vyjádření pomocí jednoho bodu a směrového vektoru

$$p: X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nebo rozepsaně

$$\boxed{\begin{aligned} p: x &= a_1 + t \cdot u_1 \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \\ &(\text{v prostoru i } z = a_3 + t \cdot u_3) \end{aligned}}$$

- vyjádření říká, že každý bod přímky získáme přičtením nějakého násobku vektoru k bodu A

Příklad 4 Zapište pomocí parametrického vyjádření

a) přímku danou body AB

b) polopřímku AB

c) úsečku AB

jestliže A[1,2], B[5,-9]

Příklad 5 Určete p tak, aby $C \in AB$. Rozhodněte, zda leží bod C na úsečce AB, případně na polopřímce AB.

a) $A[1;3]$, $B[2;4]$, $C[2p;4p-2]$

b) $A[-1;3]$; $B[1;1]$, $C[p+1;-p]$

Vzájemná poloha dvou přímek

V rovině i prostoru mohou být přímky rovnoběžné ($\parallel$), shodné ($=$), různoběžné ($\times$). V prostoru mohou být přímky také mimoběžné, tzn. nejsou rovnoběžné, ale nemají průsečík. U $\parallel$ a $=$ přímek je směrový vektor jedné přímky násobkem směrového vektoru druhé přímky.

Příklad 6 Určete parametr a tak, aby přímka r procházela průsečíkem přímek p, q.

r: $x = 2+t$
$y = 1+a-2t$
$t \in \mathbb{R}$

p: $P[1;3]$, $\vec{u}=(-1;2)$

q: $Q[1;4]$, $\vec{v}=(2;-3)$