Rovnice na základní škole

Irena Budínová

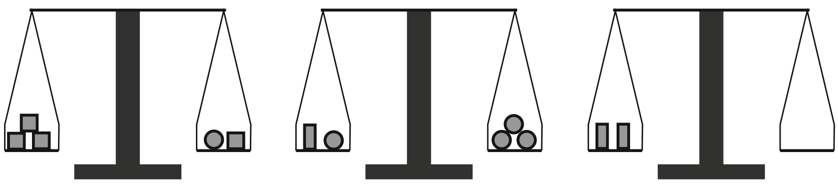
Propedeutika rovnic

Nežli začneme v 8. ročníku probírat učivo Rovnice a nerovnice, je velmi důležité již dříve žáky seznamovat s úlohami, které je možné pomocí rovnic řešit. Žáci mají k dispozici jiné mechanismy, kterými úlohy vyřeší. Necháme na nich, který přístup je pro ně přirozený, a postupně je učíme nové postupy, které mohou používat. Během 1. stupně a 6. – 7. ročníku je možné žáky seznamovat s úlohami následujících typů:

- U mladších žáků (do 6. ročníku) úlohy s váhami, kdy symboly nahrazují číselnými hodnotami, aby nastala rovnováha. Pomocí úloh s váhou je možné vyvodit některé **ekvivalentní úpravy**.
- Slovní úlohy, vedoucí na rovnice; úloha zadaná příběhem.
- Slovně zadaný matematický model situace (úlohy typu „Myslím si číslo…“).

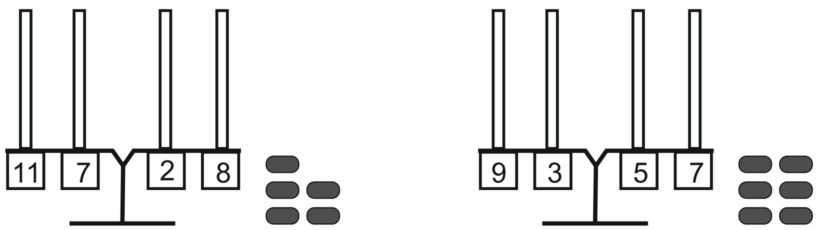
Úlohy s váhami

1. *Kolik kroužků musíme umístit na pravou stranu poslední váhy, aby nastala rovnováha? Jaká je hodnota jednotlivých útvarů?* (1. stupeň – 6. ročník)



Děti nejdříve řeší úlohu intuitivně. Kolečko jsou dva čtverce, obdélník jsou dvě kolečka, dva obdélníky jsou čtyři kolečka. Čtverec může být 1, kolečko 2, obdélník 4. Ale také všechny násobky, tj. 2, 4, 8, atd. (Zkouška: $3 \cdot 2 = 4 + 2, 8 + 4 = 3 \cdot 4, 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$)

2. *Doplňte na váhy závaží tak, aby nastala rovnováha.*



Žáci opět nejdříve řeší intuitivně, postupně se učí řešení zapisovat. Místo „neznámé“ nejdříve používají jiné možnosti zápisu (třeba prázdnou pozici):

$$11\_ + 7\_ = 2\_ + 8\_$$
$$11 + 7 = 2 + 16$$

$$9\_ + 3\_ = 5\_ + 7\_$$
$$18 + 3 = 21$$

Tento způsob zápisu je předstupněm rovnice. Žáci si sice pouze pohrávají s čísly, většinou z hlavy, ale nevědomky se učí používat mechanismy, které budou potřebovat v rovnicích.

Slovní úlohy a strategie jejich řešení

Zadávání těchto úloh může být důležitou etapou, kdy je na rovnici pohlíženo jako na hádanku a výzvu k jejímu řešení. Žáci při tom mohou používat své vlastní strategie, které nejsou tak přímočaré jako rovnice, ale rozvíjí jejich matematickou představivost. Také v historii se s takovými postupy setkáváme. Mnozí učitelé však nepovažují za vhodné, aby žáci hádali výsledek a nepostupovali hned od začátku systematicky. Řešení rovnic je hned od počátku chápáno jako algoritmus, který si mají žáci osvojit, je přeskočena etapa izolovaných modelů.

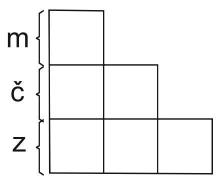
Na následujících úlohách ilustrujeme strategie řešení, které žáci mohou používat.

3. *Tatínek kupoval tři autíčka, červené, modré a zelené. Modré stálo dvakrát více než červené, zelené stálo tolik co červené a modré dohromady. Všechna autíčka stála dohromady 120 Kč. Vypočítej cenu každého autíčka.*

Možné způsoby řešení:

Bez znalosti rovnic mají žáci následující možnosti řešení rovnice:

- **úvahou** $120 : 2 = 60;\ \ 60 : 3 = 20$. Zde můžeme vidět metodu řešení, jaká je zapotřebí pro rovnice – žák dává do souvislostí ceny jednotlivých aut a celkovou cenu; modré tedy stojí 20, červené 40 a zelené 60 Kč,
- **aritmeticky s grafickým znázorněním**



Z obrázku je možno vyčíst, že budeme sumu 120 dělit 6, 120:6=20, vypočteme cenu jednotlivých aut.
- označením jednotlivých aut **písmeny** a hledáním **matematického vztahu** mezi nimi: $č = 2m, č + m = z, č + m + z = 120, 2m + m + (2m + m) = 120$ (s tímto řešením jsme se setkali už u některých žáků 4. ročníku ZŠ).

4. *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 7 a výsledek vynásobím 8, dostanu 160. Které číslo si myslím?*
5. *Jana uspořila dvakrát více než Jitka, Alena o 27 Kč méně než Jana. Celkem uspořily 453 Kč. Kolik Kč uspořila každá dívka?*
6. *Kapr váží kilo a půl kapra. Kolik váží kapr?* (Problémová úloha)

Mnoho výzkumů nedávné minulosti indikovalo, že pro žáky je přijatelnější než zadávání rovnice obvyklým způsobem $x + 3 = 5$ spíše navození slovního problému, nebo alespoň nahrazení neznámé jinými způsoby, např.

$$\_ + 3 = 5$$

$$\square + 3 = 5$$

Kalchman a Koedinger (2005) popsali jednu úlohu zadanou třemi různými způsoby: příběhem, pomocí matematického modelu, rovnicí.

- **Úloha zadaná příběhem:** Když se Tod vrátil ze svého zaměstnání číšníka, vynásobil si svoji hodinovou mzdu počtem 6 hodin, které ten den odpracoval. Když k tomu přidal 66 dolarů, které si vydělal na spropitném, zjistil, že celkem to dělá 81,90 dolarů. Kolik Tod dostává za hodinu?
- **Slovně zadaný matematický model situace:** Myslím si číslo. Když ho vynásobím 6 a pak přičtu 66, dostanu 81,9. Jaké číslo jsem si myslel?
- **Rovnice:** Najdi x, jestliže $x.6 + 66 = 81{,}90$.

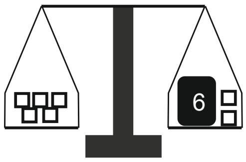
Z výzkumu vyplynulo, že žáci byli nejúspěšnější při úloze zadané příběhem. Žáci k řešení slovních úloh nevyužívali rovnic, ale zcela jiných strategií - **pokusu a omylu**, strategií **řešení „od konce“** (začali konečnou hodnotou 81,9, odečetli 66 a výsledek vydělili 6) apod. V průměru žáci dosáhli 66 % úspěšnosti v úloze zadané příběhem, 62 % ve slovně zadané úloze a 43 % u rovnice.

Nedávné výzkumy ale také ukázaly, že dokonce velmi malé děti jsou schopny používat proměnné k tomu, aby vyřešily slovně zadaný matematický model situace nebo rovnici. Děti však musí být s pojmem neznámé seznamovány takovým způsobem, aby mu porozuměly (Carraher et al., 2006).

Postupné zavádění symboliky rovnic pomocí slovních úloh a úloh s vahami

U slovních úloh nejdříve necháváme žáky, aby si údaje zapsali tak, jak je pro ně přirozené. Postupně je ale chceme přivést k tomu, aby zkracovali slova na první písmeno. Např. v úloze: *Davidova maminka váží třikrát tolik a ještě o 5 kg více než David. Kolik kg váží David, když maminka váží 59 kg?* si děti mohou udělat zápis následovně: *m=3d+5, 59=3d+5.* Můžeme sledovat, zda děti budou schopny rovnici řešit neformálně, bez algoritmu.

U váhy můžeme domluvit následující symboliku: neznámé závaží … **neznámá** … označíme x, známé závaží má udanou číselnou hodnotu.



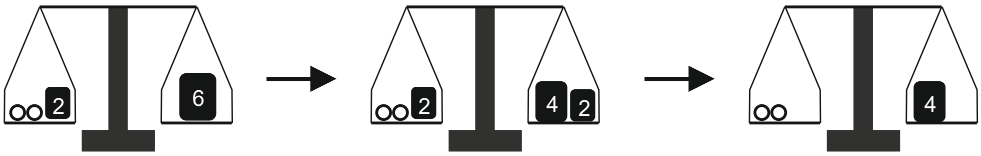
$$5x = 6 + 2x$$

Ekvivalentní úpravy vyvozené pomocí úloh s vahami

Jedná se o takové úpravy, při jejichž použití mají rovnice před úpravou a po úpravě stejné kořeny (rovnice původní a rovnice upravená mají stejnou množinu všech řešení)

- záměna obou stran rovnice
- přičtení (odečtení) stejného čísla nebo stejného výrazu k oběma stranám rovnice
- vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly
- vydělení obou stran rovnice stejným číslem různým od nuly nebo stejným mnohočlenem, který má pro každou proměnnou hodnotu různou od nuly.

Přičtení (odečtení) stejného čísla k oběma stranám rovnice:

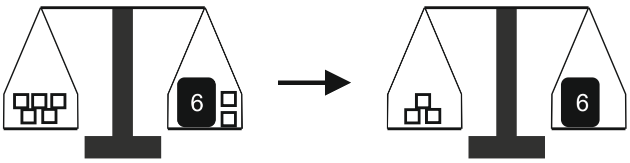


$$2x + 2 = 6$$

$$2x + 2 = 4 + 2$$

$$2x = 4$$

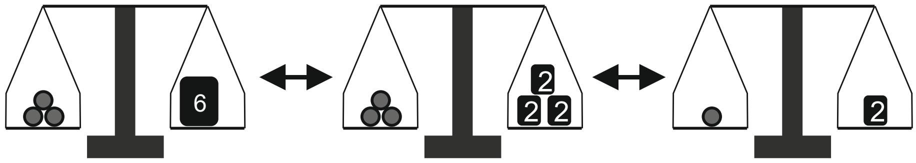
Přičtení (odečtení) stejného výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice:



$$5x = 6 + 2x$$

$$3x = 6$$

Vynásobení (vydělení) celé rovnice číslem různým od nuly:



$$3x = 6 \Rightarrow 3x = 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 6$$

Druhy rovnic probíraných na základní škole

Rozlišujme pojmy „rovnost“ a „rovnice“.

Pojem **rovnosti** je jedním z nejdůležitějších pojmů školské matematiky. Jedná se o relaci, která je:

- reflexivní, tj. pro každé *a* z dané množiny *a* = *a*
- symetrická, tj. pro každé *a, b* z dané množiny platí: jestliže *a* = *b,* pak *b* = *a*
- tranzitivní, tj. pro každé *a, b, c,* z dané množiny platí: jestliže *a* = *b* a zároveň *b* = *c,* pak *a* = *c.*

tedy je to **relace ekvivalence**.

Např. $2 + 5 = 8 - 1$

Rovnice je

a) zápis rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje neznámou,
b) výroková forma, jejíž obor pravdivosti hledáme.

Na ZŠ se žáci seznamují pouze s jedním druhem rovnic, a to **lineárními rovnicemi**. Obměnou jsou rovnice, ve kterých vystupuje neznámá ve vyšší mocnině, nebo s neznámou ve jmenovateli, ale v obou případech se po úpravách rovnice mění na lineární.

Lineární rovnice o jedné neznámé je rovnice $ax + b = 0$. Vzhledem ke koeficientům a, b má tato řešení:

- $a = b = 0$, rovnice má nekonečně mnoho řešení, každé reálné číslo x je kořenem rovnice.
- $a = 0, b \neq 0$, rovnice nemá řešení
- $a \neq 0$, rovnice má jedno řešení ve tvaru $x = -\frac{b}{a}$.

Při výuce lineárních rovnic o jedné neznámé postupujeme od jednoduchých tvarů jako $3 + x = 5, 3x = 9, 4x + 3 = 15$, na nich ukážeme základní úpravy, poté postupně přidáváme závorky, zlomky, neznámou ve jmenovateli, další složitější rovnice.

Žáky učíme přesnou posloupnost kroků pro úpravu rovnice neboli **algoritmus** pro určení neznámé. Řešení rovnice – jednak se tímto pojmem rozumí postup – **proces,** kterým určujeme neznámou (myšlenkový proces postupné transformace dané rovnice na rovnost typu „neznámá rovná se dané číslo"), jednak **kořen** rovnice (číslo, (uspořádaná n-tice čísel), které po dosazení do rovnice za neznámou (neznámé) změní danou rovnici v rovnost).

Řešit rovnici znamená určit všechny kořeny této rovnice, tj. každá taková čísla, pro které se za dosazení za neznámou do rovnice získá rovnost. Rovnici se vždy snažíme upravit do **anulovaného tvaru**, případně u lineární rovnice do **základního tvaru**.

Př.: Řešte rovnici, proveďte zkoušku: $x(4 + x) = (x - 2) \cdot (x + 5)$

$$4x + x^2 = x^2 + 5x - 2x - 10$$
$$x^2 - x^2 + 4x - 3x = -10$$
$$x = -10$$

Zk.: Používáme-li ekvivalentní úpravy, zkoušku provádíme vždy z toho důvodu, abychom odhalili případnou chybu ve výpočtu. Výsledek dosadíme do zadané rovnice.

$$L: (-10)(4 - 10) = (-10)(-6) = 60$$
$$P: (-10 - 2)(-10 + 5) = (-12)(-5) = 60$$
$$L = P$$

Rovnice s neznámou ve jmenovateli:

Při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli je možno používat **důsledkové úpravy**. Při použití důsledkové úpravy řešení upravené rovnice nemusí být řešením původní rovnice (rovnice původní rovnice původní a rovnice upravená nemají stejnou množinu všech řešení). Na ZŠ se jedná o:

- vynásobení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
- vydělení rovnice výrazem s neznámou, který je roven nule,
- umocnění obou stran rovnice na druhou,
- odmocnění obou stran rovnice

Některé důsledkové úpravy ubírají řešení zadané rovnici, jiné naopak přidávají. Při použití důsledkové úpravy je nutné provést **zkoušku** z toho důvodu, abychom odstranili přidaná řešení.

Druhou možností je na začátku řešení určit podmínky. Zkoušku provádíme i tak, abychom eliminovali chyby ve výpočtu.

Př.: Řešte rovnici a) pouze ekvivalentními úpravami, b) i důsledkovými úpravami.

$$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{4}{z-2}$$

a) Používáme-li ekvivalentní úpravy, nemusíme na začátku stanovit podmínky, teoreticky bychom na konci ani nemuseli dělat zkoušku (nepřibudou ani neubudou kořeny), zkoušku ale děláme vždy kvůli chybě.

$$\frac{z}{z+1} - 1 + \frac{4}{z-2} = 0$$

$$\frac{z(z-2) - 1(z+1)(z-2) + 4(z+1)}{(z+1)(z-2)} = 0$$

$$\frac{z^2 - 2z - z^2 + z + 2 + 4z + 4}{(z+1)(z-2)} = 0$$

$$\frac{3z+6}{(z+1)(z-2)} = 0$$

$$\frac{3(z+2)}{(z+1)(z-2)} = 0$$

Jmenovatel nikdy nemůže být roven 0, aby byla rovnice splněna, musí být čitatel roven 0, tedy $z + 2 = 0$ a máme kořen $\boxed{z = -2}$.

Provedeme zkoušku, zda nebyla udělána chyba. Dosazujeme kořen do zadání.

Zk.: $L = \frac{-2}{-2+1} = 2$, $P = 1 - \frac{4}{-2-2} = 2$, $L = P$

b) Nejdříve určíme podmínky: $z \neq -1, z \neq 2$

Celou rovnici vynásobíme výrazem $(z+1)(z-2)$ (důsledková úprava):

$$z^2 - 2z = z^2 + z - 2z - 2 - 4z - 4$$

Zpočátku provádíme úpravy jednu podruhé (ne naráz). Převádíme postupně neznámou na levou stranu rovnice, nejdříve z^2, potom od obou stran rovnice odečteme $(-5z)$, neboli přičteme $5z$. Výsledek $z = -2$ porovnáme s podmínkami.

Zk.: Opět provádíme z důvodu případné chyby. Zkouška nám také odstraní všechny přidané kořeny.

Sofismata

Najděte chybu ve výpočtu:

$$a = \frac{3}{2}b$$

$$4a = 6b$$

$$14a - 10a = 21b - 15b$$

$$15b - 10a = 21b - 14a$$

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$$

$$5 = 7$$

Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými

Jedná se o soustavu rovnic typu

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Soustavu rovnic řešíme následujícími metodami:

- **dosazovací metoda** (viz seminář)
- **sčítací metoda** (viz seminář)
- velice často se volí kombinace dvou předchozích metod – začne se sčítací metodou, vyjádří se jedna neznámá, dosadí se do jedné z rovnic
- **komparační metoda**, z obou rovnic se vyjádří např. x a porovnají se oba výrazy
- **grafické řešení** – až po probrání lineární funkce

Zásady:

- Rovnice píšeme stále pod sebe, jednotlivé kroky oddělujeme vodorovnou čárou. Častá chyba: žáci začnou pracovat jen s jednou rovnicí, pak ale nevědí, kam se mají vracet.
- Výsledek zapisujeme jako uspořádanou dvojici, např. $[x, y] = [3, 5]$.
- Zkoušku provádíme dosazením obou kořenů do zadané soustavy. Je-li nekonečně mnoho řešení, nebo není-li žádné řešení, provedeme zkoušku např. pomocí komparační metody: vyjádříme z obou rovnic jednu neznámou a porovnáme.

Př.: Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y:

$$\frac{5}{x+y} + \frac{12}{x-y} = 7$$
$$\frac{1}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 2$$

Podmínky řešitelnosti: $x \neq \pm y$. Volíme substituci: $\frac{1}{x+y} = a, \frac{1}{x-y} = b$.

$$5a + 12b = 7$$
$$a + 6b = 2$$

$$a = 1, b = \frac{1}{6}$$

Máme novou soustavu rovnic:

$$\frac{1}{x+y} = 1$$
$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{c} 1 = x + y \\ 6 = x - y \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{7}{2}, y = -\frac{5}{2}$$

Provedli jsme důsledkovou úpravu, proto kořeny porovnáme s podmínkami. Zkoušku provedeme dosazením do zadané soustavy: $L_1 = 5 + 2 = 7, P_1 = 7, L_2 = 1 + 1 = 2, P_2 = 2, L_1 = P_1, L_2 = P_2$. Řešením je uspořádaná dvojice

$$[x, y] = \left[\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right]$$

Př.: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{t+2}{3} + \frac{r-1}{5} &= 2 \\ t + \frac{3r}{5} &= 4 \end{aligned}$$

Soustava nemá řešení, zkoušku provedeme komparační metodou (z obou rovnic vyjádříme t).

Diofantovské rovnice

Neurčité neboli diofantovské (či diofantické) rovnice nejsou učivem matematiky základní školy. Vyskytují se ale v Matematické olympiádě, proto by žáci měli dostat příležitost se s nimi setkat. Na ZŠ žáci řeší tyto rovnice experimentálně, postupně je vedeme k tomu, aby našli všechna možná řešení. (Různé metody řešení diofantických rovnic viz Teorie čísel.)

Př.: Na okně jsou pavouci a mouchy. Dohromady mají 38 noh. Kolik je kterých?

Řešení: Označíme neznámé – x je počet pavouků, y je počet much. Sestavíme rovnici $8x + 6y = 38$. Lze řešit experimentem, redukční metodou, kongruencí. Výsledek: 1 pavouk a 5 much, nebo 4 pavouci, 1 mucha.

Př.: Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl týž den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.) (L. Hozová)

[Z9-I-4, 59 ročník, 1. kolo]

Řešení: Jelikož je zadání určeno žákům devátých tříd, můžeme pracovat s neznámými, pomocí nich pak vyjadřovat část celku.

$$1.\,\text{den: Adam snědl x a Eva } \frac{3}{4}\text{x}\,.$$

$$2.\,\text{den: Adam snědl y a Eva } \frac{2}{3}\text{ y.}$$

Za oba dny Adam a Eva snědli $x + \frac{3}{4}\text{x} + y + \frac{2}{3}$ y jablek, neboli:

$$x + \frac{3}{4}\text{x} + y + \frac{2}{3}\text{ y} = 31$$

Po odstranění zlomků dostáváme diofantickou rovnici: $21x + 20y = 372.$ Pokud si vyjádříme neznámou $\text{y} = \frac{372 \quad\quad}{20}$, tak vidíme, že od čísla 372 potřebujeme odečíst číslo končící určitě číslicí 2, aby byla naděje, že čitatel bude beze zbytku dělitelný dvaceti. V úvahu tedy připadají volby $x = 2, 12, 22$ ...

Nejrychlejším (i nejpřehlednějším) způsobem bude opět zápis do tabulky:

x	*2*	***12***	*22*	...
y	*1,5*	***6***	*-4,5*	...

Vzhledem k povaze zadání nebudeme uvažovat, že by děti snědly necelá jablka, proto první dvojici nebudeme brát za možný výsledek, jediná zbývající je druhá v pořadí.

Pokud $\text{x} = 12$, pak 1. den Adam snědl 12 jablek, a Eva 9. Pokud $\text{y} = 6$, snědl Adam 6 jablek a Eva 4.

Odpověď: Eva snědla celkem 13 jablek.

Lineární nerovnice

Žáci již od 1. stupně znají **nerovnosti** typu např. $5 < 8$. Intuitivně řeší úlohy typu: *Najdi všechna (přirozená) čísla menší než 7.*

Zápis nerovnosti dvou výrazů, ve kterém musíme určit neznámé číslo tak, aby daná nerovnost platila, nazýváme **nerovnice**. Řešit nerovnici znamená najít taková čísla, aby po dosazení těchto čísel za neznámou se nerovnice změnila ve správnou nerovnost. Nalezená čísla se nazývají řešení dané nerovnice. Rozlišujeme **ostré nerovnice** a **neostré nerovnice**.

Žáci se musí seznámit s pojmem **intervalu**, úlohy řeší v množině reálných čísel nebo přirozených čísel. Velmi vhodné je řešení úloh pomocí číselné osy.

Nejčastěji užívané úpravy lineární nerovnice jsou:

1. Přičítání nebo odčítání stejného výrazu k oběma stranám nerovnice.
2. Násobení nebo dělení obou stran nerovnice stejným číslem různým od nuly. Žáci si musí uvědomit, že při násobení obou stran nerovnice záporným číslem se změní znak nerovnosti v opačný ($11 > 9, -11 < -9$).

Zkoušku správnosti provádíme náhodným dosazením čísla z nalezeného intervalu.

Př.: Řešte nerovnici s neznámou x v množině přirozených čísel: $\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3}$

$$2 + 27x < 15 + 2(12x + 1)$$
$$2 + 27x < 15 + 24x + 2$$
$$27x - 24x < 15$$
$$3x < 15$$
$$x < 5$$

Řešením jsou čísla $1, 2, 3, 4$, tj. $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Zkoušku provedeme dosazením do zadání, např. $x = 1$: $L = \frac{29}{6}, P = \frac{5}{2} + \frac{13}{3} = \frac{15+26}{6} = \frac{41}{6}, L < P$

Př.: Řešte soustavu nerovnic s neznámou x:

$$\frac{\begin{array}{c} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3) \\ 7x - 3(2x+3) \geq 2(x-18) \end{array}}{\begin{array}{c} x > 5 \\ x \leq 27 \end{array}}$$

Řešení určíme z číselné osy:

$x \in (5, 27\rangle$, zkoušku provedeme náhodným dosazením.

Př.: Řešte nerovnici s neznámou x: $\frac{2x+1}{x+2} \geq 1$

Podmínky řešitelnosti: $x \neq -2$

$$\frac{2x+1}{x+2} - 1 \geq 0$$
$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

Jsou dvě možnosti, které určíme pomocí číselné osy.

Řešením je $x \geq 1$ nebo $x < -2$, celkem $x \in (-\infty, -2) \cup \langle 1, \infty)$.

Aplikační úloha: Dokažte, že nerovnost $a^2 + 1 \geq 2a$ platí pro každé reálné číslo a.

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$(a - 1)^2 \geq 0$$

Poslední nerovnost je splněna pro každé reálné číslo a vzhledem k použitým ekvivalentním úpravám je také původní nerovnost splněna pro každé reálné číslo a.

Kvadratické rovnice na SŠ

Kvadratické rovnice se na základní škole v běžných třídách neprobírá. Přesto by měl mít učitel ZŠ dobré povědomí o jejich řešení.

Kořeny kvadratické rovnice hledáme nejčastěji následujícími způsoby:

- pomocí vzorce (viz seminář),
- pomocí Viétových vzorců (viz seminář),
- pomocí doplnění na úplný čtverec (viz seminář),
- ve speciálních případech, kdy $b = 0$ (ryze kvadratická rovnice) nebo $c = 0$ používáme **rozkladu mnohočlenů**. V těchto případech se velmi často vyskytují chyby.

Př.: Určete kořeny rovnice $2x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2$.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

Kořeny jsou $x_1 = 2, x_2 = -2$. Použili jsme vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Častá chyba: Rovnice se upraví do tvaru $x^2 = 4$, použije se důsledková úprava odmocnění, která odebere jeden kořen (protože druhou odmocninu určujeme z nezáporného čísla a výsledkem je nezáporné číslo). Máme tedy jediný kořen $x = 2$, učitelé však bez odůvodnění píší $x = \pm 2$.

Př.: Určete kořeny rovnice $(x + 1)^2 = 5x + 1$.

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$

Kořeny jsou $x_1 = 0, x_2 = 3$.

Častá chyba: Rovnice se upraví do tvaru $x^2 = 3x$, provede se důsledková úprava dělení nulou, tím odstraníme kořen $x = 0$.

Literatura:

Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, 23. svazek. Praha: Prometheus, 2003

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D.: Arithmetic and algebra in early mathematics education. In *Journal for Research in Mathematics Education 37* (2), 87 – 115. 2006

Czudek, P. a kol.: *Slovní úlohy řešené rovnicemi. 555 úloh pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ.* Praha: sdružení podnikatelů HAV, 1998

Hejný, M.: *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* PdF UK, Praha 2014. ISBN 978-80-7290-776-2

Kalchman, M., Koedinger, K. R.: Teaching and Learning Functions. In: *How Students Learn: Mathematics in the Classroom*. Editors: Donovan, M. S., Bransford, J. D. Washington, DC, USA: National Academic Press, 2005

Tipps, S., Johnson, A., Kennedy, L. M.: *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Wadsworth, Cangage Learning, 2011