SLOVNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ ROVNICEMI

Růžena Blažková, Irena Budínová

Slovní úlohy jsou úlohy, ve kterých jsou vztahy mezi známými a neznámými údaji vyjádřeny slovní formulací. Úkolem řešení slovních úloh je najít hledané údaje, tedy stanovit posloupnost operací, které je třeba s danými údaji provést, aby bylo možné odpovědět na otázku. K tomu je nutné porozumět textu zadání slovní úlohy, provést přepis textu do matematického jazyka – v tomto případě do rovnice či soustavy rovnic.

Schematicky:

SLOVNÍ ÚLOHA	→	Matematizace reálné situace	→	MATEMATICKÁ ÚLOHA
↓				↓
VÝSLEDEK SLOVNÍ ÚLOHY	←	Interpretace výsledku MÚ do reality	←	VÝSLEDEK MATEMATICKÉ ÚLOHY

Výsledek matematické úlohy nemusí být vždy výsledkem slovní úlohy. Mohou nastat případy, kdy matematická úloha má více řešení, avšak pro interpretaci do reality vyhovují jen některá řešení.

Řešení slovních úloh má na základní škole nezastupitelnou funkci. Mají **funkci**

- motivační – přibližují zavádění nových pojmů
- přispívají k rozvoji myšlení žáků
- aplikační - ilustrují použití učiva v praxi
- výchovnou – číslo je přesvědčivým argumentem
- přímo rozvíjí kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, i další prostřednictvím volby vhodného tématu úlohy.

Postup řešení slovní úlohy:

1. Analýza textu – Co máme vypočítat, které údaje jsou známé. Čtení textu s porozuměním dělá žákům problémy.
2. Označení neznámé. Důležité je stanovit neznámou tak, aby bylo možné vyjádřit další vztahy.

3. Matematický zápis vztahů mezi veličinami. Problémy činí zejména vyjadřování vztahů na porovnávání.

4. Sestavení rovnice (soustavy rovnic). Správně zaznamenat vztahy tak, aby se obě strany rovnice sobě rovnaly.

5. Vyřešení rovnice. Zde se projeví chyby v provádění operací (závorky – před závorkou "-„ , roznásobení závorek – dvou dvojčlenů, zlomky – všechny výrazy vynásobit společným jmenovatelem, chyby numerické, apod.)

6. Dvě zkoušky správnosti (zkouška správnosti slovní úlohy se neprovádí dosazením do rovnice – ta může být sestavena nesprávně, viz další příklad).

7. Odpověď na otázku slovní úlohy.

Poznámka: Při řešení slovních úloh dbáme na správný zápis jednotek. Máme dvě možnosti, jak postupovat:

1. Úlohu matematizovat a během řešení rovnice počítat pouze s čísly, k jednotkám se vracíme v odpovědi.

2. Jednotky důsledně zapisovat po celou dobu řešení.

Zásadně se však vyhýbáme smíšeným zápisům, kdy na jedné straně rovnice jednotky nepíšeme a na druhé ano – např. (viz př. 3) 0,8.380 = 304 Kč. Správný zápis: 0,8.380 Kč = 304 Kč.

Typy příkladů

1. *Anička si koupila tričko, svetr, který byl třikrát dražší než tričko a boty, které byly o 230 Kč dražší než svetr. Celkem zaplatila 1 980 Kč. Kolik Kč stály jednotlivé kusy, které si koupila?*

Označení neznámé: cena trička

Zápis vztahů: cena trička v Kč … x

cena svetru v Kč …3x

cena bot v Kč …3x + 230

Sestavení rovnice: x + 3x + 3x + 230 = 1 980

řešení rovnice: 7x + 230 = 1 980

$$7x = 1\,750$$

$$x = 250$$

Zkouška slovní úlohy: tričko 250

svetr 3. 250 = 750

boty 750 + 230 = 980

celkem 250 + 750 + 980 = 1 980

Odpověď: Tričko stojí 250 Kč, svetr 750 Kč a boty 980 Kč.

2. *Při rozvozu zboží rozvezli 1. den jednu třetinu zásilky, druhý den dvě pětiny zbytku, třetí den 300 kusů. Kolik kusů zboží bylo v zásilce?*

Neznámá: počet kusů zboží v zásilce

První den rozvezli … $\frac{1}{3}x$ … zbytek $\frac{2}{3}\,x$

Druhý den rozvezli … $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\,x$

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}x + 300 = x$$

$$5x + 4x + 4\,500 = 15\,x$$

$$6\,x = 4\,500$$

$$x = 750$$

Zkouška SÚ 1. den … 250

2. den … 200

3. den … 300

Celkem: 750

Odpověď: V zásilce bylo 750 kusů zboží.

Možné chyby: Nevynásobí všechny členy rovnice

3. *Cena encyklopedie byla snížena o 450 Kč, takže 4 knihy za novou cenu jsou o 600 Kč levnější, než byly 3 knihy za starou cenu. Jaká byla původní cena knihy a kolik Kč stojí po slevě?*

Neznámá: původní cena knihy

Rovnice: $4(x - 450) + 600 = 3x$

Řešení rovnice: $x = 1\,200$

Zkouška SÚ: stará cena v Kč 1 200

nová cena v Kč 1 200 – 450 = 750

4 . 750 = 3 000

3 . 1 200 = 3 600 rozdíl 600.

Odpověď: Cena encyklopedie po slevě je 750 Kč.

Chyby: $4(x - 450) = 3x + 600$ (600 přičte špatně)

$x = 2\,400$

Pokud se dělá jen zkouška dosazením do rovnice, zkouška vyjde, avšak zkouška slovní úlohy nevyjde.

4. *Jaká je cena koně, když jedna desetina jedné poloviny ceny koně je 7 tisíc korun?*

Neznámá : cena koně

Rovnice: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} x = 7\,000$

$$x = 140\,000$$

Problém žáků: vyjádření vztahů.

5. *Sud je naplněn vodou z jedné třetiny objemu. Po odlití 5 litrů vody byl sud naplněn do jedné čtvrtiny. Jaký je objem sudu?*

Neznámá: objem sudu (v litrech)

Rovnice: $\frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{4}$

$x = 60$

Zkouška: Na začátku je v sudu 20 l vody, po odlití 15 l vody, což je $\frac{1}{4}$ objemu sudu.

Odpověď: Objem sudu je 60 litrů.

6. *Sad ovocných stromků byl vysazován během tří let. Ve druhém roce bylo vysázeno o 15 % více stromků než v prvním roce, ve třetím roce bylo vysázeno o 40 % méně než v prvním a druhém roce dohromady. Celkem bylo vysázeno 4 128 stromků. Kolik stromků bylo vysázeno v jednotlivých letech?*

Neznámá: počet stromků v prvním roce

Rovnice: $x + 1{,}15\,x + (2{,}15x - 0{,}4 \,.\, 2{,}15\,x) = 4\,128$

$$x = 1\,200$$

Zkouška: 1 rok 1 200 stromků, 2. rok $1{,}15 \cdot 1200 = 1380$, 3. rok $0{,}6 \cdot (1200 + 1380) = 1548$, celkem 4128.

Odpověď: V prvním roce bylo vysázeno 1200 stromků, ve druhém 1380 stromků, ve třetím 1548 stromků.

Problém: vyjádření 3. roku, počítání s desetinnými čísly. Procenta lze vyjádřit též zlomky se jmenovatelem 100.

7. *Otec je stejně stár, jako je součet věků jeho pěti dětí. Ten činí 42. Za kolik roků bude jeho věk roven polovině součtu věku jeho dětí?*

Neznámá: počet roků, které uplynou

Rovnice: $2(42 + x) = 42 + 5x$

$$x = 14$$

Zkouška: Otci je 42 let, za 14 let mu bude 56 let. Věk každého z dětí se zvýší o 14, tj. celkem o $5 \cdot 14 = 70$ let. $42 + 70 = 112$, $112 : 2 = 56$.

Odpověď: Za 14 let bude otcův věk roven polovině součtu věku jeho dětí.

Slovní úlohy o směsích

8. *Ze dvou druhů jablek – 1. druh v ceně 21 Kč za kg, 2. druh v ceně 13 Kč za kg – máme smíchat 50 kg směsi v ceně 17,80 Kč za kg. Kolik kilogramů každého druhu máme vzít?*

a) řešení lineární rovnicí o jedné neznámé: počet kilogramů dražších jablek označíme x, počet kilogramů levnějších jablek $(50-x)$

$$21x + 13(50-x) = 50.17{,}80$$

$$x = 30$$

obecně $ax+by=(x+y).c$

b) řešení soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých: počet kilogramů dražších jablek je x, levnějších jablek y

$$x + y = 50$$

$$21x+13y = 50.17{,}80$$

$$x=30,\ y=20$$

Zkouška SÚ: $30 \cdot 21 + 20 \cdot 13 = 890, 890 : 50 = 17{,}80$

Odpověď: Vezmeme 30 kg dražších jablek a 20 kg levnějších jablek.

12. *Kolik vody přidáme do 92% lihu, abychom získali líh 65%?* (65 dílů lihu a 27 dílů vody)

Slovní úlohy o pohybu

Před řešením úloh o pohybu je třeba se žáky s předstihem zopakovat:

a) převody jednotek času (1h = 60min, 1min=60s) a rychlosti (1 m/s =3,6 km/h, odvodit)

b) fyzikální vztahy pro rychlost, dráhu, čas, taktéž vyjadřování neznámé ze vzorce

c) skutečnost, že jestliže se dvě tělesa pohybují proti sobě, přibližují se k sobě rychlostí, která je rovna součtu rychlostí obou těles. Jestliže se dvě tělesa pohybují stejným směrem, těleso s větší rychlostí se přibližuje k tělesu s menší rychlostí takovou rychlostí, která je rovna rozdílu rychlostí obou těles.

Úlohy o pohybu lze řešit aritmeticky, pomocí rovnic, graficky.

13. Vzdálenost měst A, B je 60 km. Z města A vyšel chodec průměrnou rychlostí 4 km za hodinu a současně proti němu vyjelo nákladní auto z města B. Jaká byla rychlost nákladního auta, jestliže se s ním chodec setkal za 1,2 hodiny?

Zakreslíme grafické znázornění.

Verze vhodná pro 6. ročník:

13. a) Vzdálenost měst A, B je 60 km. Z města A vyšel chodec průměrnou rychlostí 4 km za hodinu a současně proti němu vyjelo nákladní auto z města B rychlostí 46 km za hodinu. Z jak dlouho se setkají?

Nyní na základě získaných poznatků – aritmetické řešení a řešení pomocí rovnice – můžeme vyřešit samotnou úlohu 13.

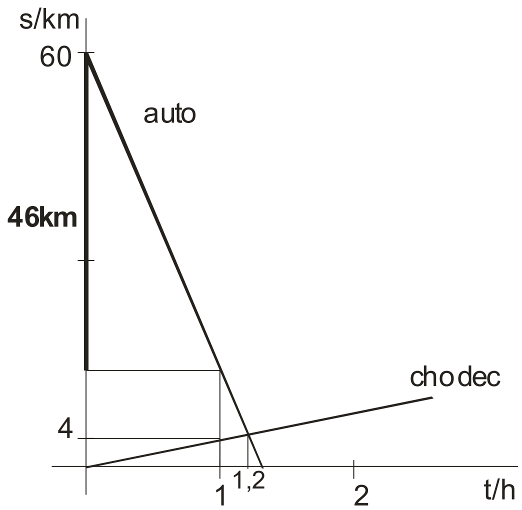
Zapíšeme známé a neznámé údaje: s=60 km, v_1=4 km/h, v_2=?, t=1,2 h. Je také vhodné zakreslit schematický obrázek situace pro lepší představu.

a) aritmetické řešení (buď s jednotkami nebo bez nich):

$s_1=v_1t$=4 km/h . 1,2 h = 4,8 km
s_2=60 km – 4,8 km = 55,2 km
$v_2=s_2/t=\frac{55{,}2\,km}{1{,}2\,h}$ =46 km/h
Zkouška: Vypočítáme, kolik km ušel chodec ($4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$), kolik km ujelo auto ($46 \cdot 1{,}2 = 55{,}2$), dohromady to musí dát celkovou dráhu (55,2+4,8=60).

b) řešení pomocí rovnice:
$s=s_1+s_2$
$s=v_1t+v_2t \Rightarrow s - v_1t = v_2t \Rightarrow v_2 = \frac{s-v_1t}{t}$

c) graficky: volíme vodorovnou osu časovou, svislou pro vzdálenost chodce a auta (nikoli dráhu), ze známých údajů (doba, kdy se setkali a rychlost chodce) zakreslíme grafy rychlostí obou dvou. Z grafu již vidíme (pokud rýsujeme přesně), že auto ujelo za hodinu 46 km.



14. *Z vesnice A vyšel v 11 hodin Vašek rychlostí 4,5 km/h směrem do vesnice B, která je od vesnice A vzdálena 6 km. V 11:30 hodin vyšel z vesnice B Dalibor rychlostí 4,8 km/h směrem do vesnice A. Kolik kilometrů od vesnice B se potkají? V kolik hodin to bude?*

Úlohu „proti sobě“, kdy děje nezačínají ve stejný okamžik, nejdříve převedeme na úlohu, kdy děje začínají ve stejný okamžik. Obě situace zakreslíme obrázkem.

Odpověď: Potkají se přibližně 2 km od vesnice B v 11:54 hodin.

15. *Na dvoukolejné trati dohonil rychlík nákladní vlak. Rychlík jel rychlostí 72 km za hodinu, nákladní vlak rychlostí 36 km za hodinu (jedou stejným směrem). Za jakou dobu budou od sebe vzdáleni 9 km?*

Aritmeticky lze úlohu řešit pomocí rozdílu rychlostí.

Pomocí rovnice vycházíme ze zadané informace $s_2 - s_1 = 9$ km.

Odpověď: Za čtvrt hodiny budou vzdáleni 9 km.

16. *Za traktorem, který jede rychlostí 18 km za hodinu, vyslali o 3,5 hodiny později osobní auto, které má traktor dohonit za 45 minut. Jakou průměrnou rychlostí musí automobil jet?*

Nejdříve dopočítáme počáteční vzdálenost mezi traktorem a autem, ta je 63 km. Aritmetické řešení pomocí rozdílu rychlostí je nevýhodné (neznáme jednu rychlost), použijeme rovnici. Nezapomeneme převést jednotky. Auto musí jet rychlostí 102 km/h.

Poznámka: V některých úlohách o pohybu je daleko snazší postupovat úvahou než rovnicemi. Např. následující úlohu je daleko jednodušší nakreslit a řešit úvahou:

Dva běžci trénují na kruhové dráze, která je dlouhá 375 metrů. Když startují ze stejného místa a běží opačným směrem, potkají se za 30 sekund. Když běží stejným směrem, je mezi nimi za 30 sekund vzdálenost 15 m. Jaká je průměrná rychlost každého z běžců?

Situace nakreslíme pod sebe, a to ne do kruhových drah, ale na úsečky. Z obrázků si můžeme všimnout, že když od celkové dráhy 375 m odečteme 15 m, výsledek 360 m vydělíme dvěma, dostaneme to, co uběhl první běžec. Tedy $s_1 = 180$ m, $s_2 = 195$ m. Z času 30 s dopočítáme rychlosti, $v_1 = 6$ m/s, $v_2 = 6{,}5$ m/s. Řešení s rovnicemi by bylo zdlouhavé, žáci by se v něm nemuseli vyznat.

Úlohy o společné práci

Pro řešení úloh o společné práci je nezbytné ujasnit vztahy mezi počtem hodin potřebných k vykonání určité práce a množstvím práce vykonané za 1 hodinu (2 hodiny, x hodin).

Např.: Traktorista zorá pole za 10 hodin. Jakou část práce vykoná za 1 hodinu (5 h, 12 h)? Jeden dělník vykoná určitou práci za 8 hodin, druhý by ji vykonal za 6 hodin. Jakou část práce vykonají za 1 hodinu (2 h, x h), budou-li pracovat společně? Dělník vykoná určitou práci za a hodin, učeň za b hodin. Za kolik hodin splní úkol při společné práci?

16. Na splnění úkolu pracují dva dělníci. Jeden z nich by splnil sám úkol za 12 hodin, druhý za 10 hodin. Za kolik hodin splní úkol, budou-li pracovat společně?

První dělník za hodinu udělá 1/12 práce, druhý 1/10 práce. Dohromady za hodinu udělají 1/12+1/10 práce, což můžeme označit jako x-tinu práce, celou práci proto udělají za x hodin:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{10}=\frac{1}{x}$$
$$x\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)=1$$
$$x=\frac{60}{11}\doteq 5{,}5$$

Provádíme důsledkovou úpravu násobení rovnice neznámou.

Zkouška: 1.dělník ... za 5,5 h ... přibližně 0,45 úkolu
2. dělník ... za 5,5 h .. přibližně <u>0,55 úkolu</u>
1 úkol

Poznámka: Úlohy nemusíme vždy volit tak, aby vycházely „krásně“ (tj. celočíselně), aby se žáci také naučili zaokrouhlovat nebo vyjadřovat výsledek zlomkem.

17. Na vyčištění mýtiny by potřeboval první dělník 12 hodin, druhý dělník 8 hodin. Druhý začal pracovat, když první měl 2 hodiny práce za sebou. Za kolik hodin dokončili práci společně?

První dělník pracoval sám 2 hodiny, což znamená, že udělal šestinu práce. Zbylo tedy $\frac{5}{6}$ práce, přepočítáme údaje. Vytvoříme rovnici. Společně pracovali 4 hodiny.

18. Zásoba uhlí stačila na vytopení většího pokoje na 12 týdnů, menšího pokoje na 14 týdnů. Zpočátku se topilo 4 týdny v obou pokojích, pak jen v menším. Na kolik týdnů stačila zásoba uhlí?

Za týden se spotřebuje $\frac{1}{12}$ uhlí v 1. pokoji, $\frac{1}{14}$ uhlí v 2. pokoji. Za 4 týdny: $\frac{1}{3}$ v 1. pokoji, $\frac{2}{7}$ v 2. pokoji. Celkem se za 4 týdny spotřebovalo $\frac{13}{21}$ uhlí, zbylo $\frac{8}{21}$. To stačilo na $5\frac{1}{3}$ týdne v malém pokoji.

Pozor! Některé úlohy na směsi se tváří jako úlohy o společné práci. Mohou být jako chyták na přijímacích zkouškách. (Viz úloha řešená na semináři:)

17. *Dva různé traktory denně společně zorají 8 ha pole. Na zorání 95 ha polí je třeba, aby první traktor pracoval 10 dní a druhý traktor 15 dní. Kolik ha pole denně zorá každý traktor?*

Literatura:

Blažková, R., Matoušková, K.: K problematice výuky řešení slovních úloh na základní škole. In: *Sborník prací Pedagogické fakulty MU v Brně,* svazek 122, s. 17-30. Brno: MU, 1987

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M.: *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy a projekty).* Brno: MU, 2011