Algebra na 2. stupni ZŠ

Irena Budínová

Které učivo se probírá na 2. stupni ZŠ v rámci algebry?

- mnohočleny
- lomené výrazy
- rovnice a nerovnice
- soustavy rovnic
- funkce

K tomu, aby mohli být žáci úspěšní v algebře, je důležité, aby měli rozvinuté algebraické myšlení. To by mělo být rozvíjeno již od 1. stupně ZŠ.

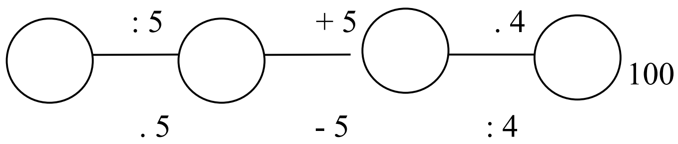
Rozvoj před-algebraického myšlení

Žáci se mohou na příchod algebra připravovat již od 1. stupně, a na 2. stupni v 6. a 7. ročníku, a to prostřednictvím různých úloh:

- **Dočítací úlohy**, např. $3 + \_\_ = 7$, $2 \cdot \_\_ + 3 = 11$ (1. a 2. třída).
- Zakreslování **řetězců** v úlohách typu „myslím si číslo" (2.-5. ročník).

Např.: *Myslím si číslo. Jestliže toto číslo vydělím pěti, přičtu 5 a tento součet vynásobím čtyřmi, dostanu 100. Které číslo si myslím?*

Úlohu lze znázornit pomocí řetězce:



Můžeme počítat od konce, tedy pomocí inverzních operací:

100 : 4 = 25, 25 – 5 = 20, 20 . 5 = 100

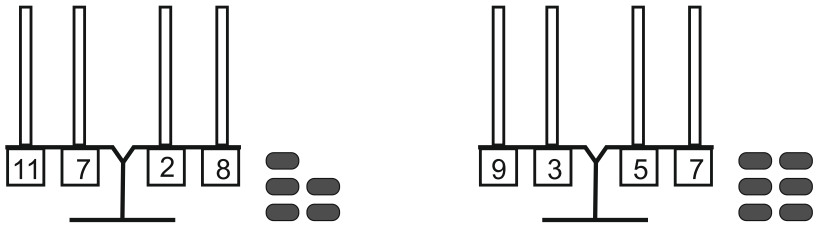
- Používání **řízeného experimentu** při řešení slovních úloh.
- **Grafické znázorňování** aritmetických vztahů ve slovních úlohách. Používání **úsečkových modelů** při dělení na nestejné části.

David a Michal měli dohromady 15 modelů autíček. Michal měl dvakrát tolik a ještě o tři více než David. Kolik autíček měl David?

Děti mohou situaci modelovat např. pomocí kuliček. Snaží se celkový počet dělit třemi, mají tři hromádky o počtu kuliček 5. Výsledek 5 a 10 ale neodpovídá zadání. Tak ještě odeberou z první hromádky kuličku, výsledek 4 a 11 odpovídá zadání: $2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11, 4 + 11 = 15$

- **Úlohy s vahami** (propedeutika řešení rovnic).

Např.: Na následující váhu umísti závaží tak, aby nastala rovnováha. U každé váhy máš informaci o tom, jakou hodnotu má závaží umístěné na váze a kolik závaží máš použít.



Žák se učí zapisovat: $11 \cdot \_\_ + 7 \cdot \_\_ = 2 \cdot \_\_ + 8 \cdot \_\_$.

- V Hejného metodě prostředí **Děda Lesoň**.
- **Algebrogramy**.

Na základní škole se žáci s algebrou setkávají při počítání s obecným vyjádřením. Žákům činí velký problém odpoutat se od konkrétních čísel k číslům vyjádřeným proměnnou. V praxi je úvod algebry (výrazy) probrán velmi rychle a bez monitorování efektivnosti výuky a ještě učitelé na gymnáziích nemohou studenty naučit proměnné správně používat. Na správném pochopení práce s proměnnou je však založena celá řada dalších částí matematiky – funkce, geometrické výpočty.

Výrazy

Proč potřebujeme počítat s obecným vyjádřením a kde se s ním setkáme

a) Ve školské matematice – zobecňování vztahů, např.
   - Vztahy pro výpočty obvodů, obsahů, povrchů, objemů geometrických útvarů, např. $o = 2(a + b), S = ab, V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, apod.
   - Rovnice, např. $15x + 6 = 3x$
   - Funkční závislosti, např. $f = ax + b$

b) Technická praxe – výpočet řezné rychlosti, dráhy potřebné k zastavení vozidla aj.

c) Ostatní vědní disciplíny, např. biologie – vztahy pro výpočet množení generací

fyzika, chemie – poločas rozpadu

výpočet indexu BMI $\frac{m}{v^2}$

kódování, komprese dat v počítačích

d) Běžný život – v každé profesi je třeba brát v úvahu vstupní parametry, které jsou zpravidla proměnné a v závislosti na nich sledovat výstupní hodnoty.

Používání písmen ve významu čísla

Písmena mají v matematice několik významů:

a) Význam proměnné – např. v rovnici **y** = k**x** + q jsou proměnnými x, y.

b) Význam konstanty – v rovnici y = **k**x + **q** jsou konstantami k, q.

c) Jediné, jednou pro vždy dané číslo, např. π, e, i.

d) Označení neznámé v rovnici, proměnné v nerovnici.

e) Nemusí mít žádný význam, resp. význam neznámé např. v rovnici $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=2$

Co si žáci mají odnést z výuky výrazů na ZŠ

- Práci s **číselnými výrazy**: sčítání a odčítání mocnin stejného druhu, např. 2^2+3^2 nemůžeme sečíst, museli bychom jedině umocnit, nebo 2^2+2^3 také nejde sečíst, sčítání odmocnin stejného druhu, např. $\sqrt{2}+2$ nelze sečíst (pouze přibližně při vyčíslení odmocniny), umocnění dvojčlenu, např. $\left(3-\sqrt{2}\right)^2$, umocnění zlomku, např. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$, přednost násobení a dělení před sčítáním a odčítáním, např. $6\cdot 2+1:3$ (některé děti by pro zjednodušení nejdříve sečetly 2+1), přednost závorek, např. $(18-6):(7-4)$, přednost umocňování před násobením či dělením, roznásobování minusem, např. $2-(5-6)$, roznásobování obecně (násobení mnohočlenů).

  Hned několik z uvedených úkonů je rizikových, žáci v nich často dělají chyby. Dokud žák není schopen pracovat s jednoduchými číselnými výrazy, nemá vůbec smysl pokračovat k výrazům s proměnnou.

  Žáci by se pravidelně měli setkávat také se slovními úlohami vedoucími na číselné výrazy, jako vytvořit výraz ze zadání: *Jana nasbírala 5 hříbků, Roman 7 hříbků, babička dvakrát tolik než obě děti dohromady a tatínek o 4 hříbky méně než babička. Zapište celkový počet hříbků.* $5+7+(5+7)\cdot 2+[(5+7)\cdot 2-4]=12+24+20=56.$
  (Synteticky – spočítá každou část zvlášť, analyticky – zapíše výraz)

- Práci s **výrazy s proměnnou**: Dětem by vůbec mělo být sděleno, co termínem „proměnná“ myslíme. Měly by se tedy setkávat s úlohami, kdy pomocí tabulky určují různé hodnoty proměnné: *Zjistěte, jakých hodnot nabývá výraz* $5+2u$ *pro* $u=-2,-1,0,2,3$. Žáci počítají dosazením, výsledky si zapisují do tabulky.

u	-2	-1	0	2	3
$5u+2$	-8	-3	2	12	17

  Při této příležitosti mohou žáci ověřovat vlastnosti sčítání čísel, jako **komutativitu**: *Ověřte, že platí* $a+b=b+a$, nebo **asociativitu:** *Ověřte, že pro libovolná čísla platí* $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Dále se žáci seznamují s umocněním dvojčlenu, umocněním zlomku, vzorce $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, učí se upravovat polynomy: sčítání polynomů, odčítání polynomů, násobení dvou polynomů, nejdříve dvou jednočlenů, např. $12ac^2 \cdot 2a^3$, později vícečlenů s roznásobováním, dělení jednočlenů, např. $20r^3s : 8rs^2$, rozklady polynomů pomocí vzorce a pomocí částečného vytýkání; dále se učí upravovat lomené výrazy, ve kterých zužitkují všechny předchozí poznatky: *Zjednodušte lomený výraz* $\frac{s^3+2s^2-s-2}{s^2+2s+1} : \frac{s+2}{2}$. Určují podmínky pro lomený výraz.

Aktivita pro studenty: vyberte si jednu z následujících výkonnostních skupin žáků: 1) slabí žáci, žáci s poruchami učení, 2) průměrní žáci, 3) bystří a nadaní žáci.

Vymyslete si či najděte úlohu na úpravu algebraických výrazů pro danou skupinu žáků.

Historická poznámka

Počátky prvních náznaků algebry spadají do doby kolem roku 2 000 let před naším letopočtem, kdy byly řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí rovnic.

Zpočátku nebyly známy znaky pro početní výkony, zapsání rovnosti či nerovnosti mezi čísly a všechny vztahy mezi matematickými veličinami byly vyjadřovány slovy a větami. Toto období nazýváme obdobím **verbalistickým** (úlohy na hliněných destičkách psaných klínovým písmem v Babylónii, sbírky úloh z Číny, Ahmesův papyrus z Egypta). V Rhindově papyru, pocházejícího ze starověkého Egypta přibližně z doby 1650 př. n. l., se můžeme setkat s následující úlohou: *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.* V papyru je úloha řešena metodou **chybného předpokladu**. Řešitel nejprve předpokládá, že hledané množství je rovno čtyřem, protože ze čtyř určí jednoduše čtvrtinu. Dostává $4+\frac{1}{4}\cdot 4=5$, tedy třetinový výsledek. Hledané číslo musí být proto třikrát větší, tj. 12.

Kolem roku 500 před naším letopočtem řešili Řekové úlohy, které dnes řadíme do algebry, geometrickými prostředky. K rozvoji algebraické symboliky sice nepřispěli, ale rozvinuli užívání geometrických úvah k řešení úloh algebraického charakteru. Hovoříme o **geometrické algebře Řeků**. Až teprve *Diofantos z Alexandrie* kolem roku 250 před naším letopočtem napsal spis o rovnicích (nazvaný Aritmetika) a užívá v něm některé symboly, které dnes nazýváme algebraickými (např. pro neznámou používal symbolu ρ, pro odčítání použil symbol $\cap$ který měl být obráceným písmenem ψ, pro umocňování δ^{ν} - dynamos – čtverec. Různý stupeň mocniny vyjadřoval různým základem, např. κ^{ν} byla třetí mocnina – kubos – krychle.). *Diofantem* bylo zahájeno druhé období vývoje algebry, kdy některé vztahy mezi matematickými veličinami byly popisovány slovy a větami, jiné byly již zapisovány zvláštními symboly. Toto období nazýváme obdobím **synkopickým.** Trvalo až do konce 15. století n. l., tj. až do doby, kdy vývoj v matematice dospěl k zavedení znaků pro operace a používání písmen ve významu čísel.

Nejvýznamnějším matematikem druhého období byl tádžický matematik *Abu Abdalh Muhamed ben musa al Chorezmi(780? – 850)* zvaný *Al Chovarizmi*, který žil v IX. století n.l.

Napsal dva spisy, které měly rozhodující vliv na rozvoj matematiky v arabském světě a v Evropě. Spis Aritmetika obsahuje předpisy pro provádění početních výkonů, druhý spis Aldžebr v´almukabala obsahuje nauku o rovnicích. Ze slova „aldžebr“ se odvodil název celé disciplíny – algebra, část jména Al Chovarizmiho pak dala název algoritmu.

Metodu chybného předpokladu použil také indický matematik Bháskara, žijící ve 12. století, pro řešení následující úlohy: *Ze svazku čistých lotosů byly jedna třetina, pětina, resp. šestina postupně obětovány bohům Šivovi, Višnovi či Šúrjovi a čtvrtina byla obětována Bhavanimu. Zbývajících šest bylo darováno vysoce váženému hodnostáři. Rychle mi řekni, kolik bylo lotosů?* Bháskara za počet lotosů volí číslo 60, což je nejmenší společný násobek čísel 3, 4, 5, 6. Při dosazení tohoto čísla do zadání zbývají tři lotosy a ne 6, proto je řešením úlohy číslo 120.

V první polovině XIII. století používal někdy také *Leonardo Pisánský (*1170*? – 1250)* písmen k označení pro čísla (spis Liber abaci). Největší zásluhu o důsledné zavedení písmen ve významu čísel má francouzský matematik *Francois Viéte (1540 – 1603)*, který ve spise Logistica speciosa tato písmena používá. Navrhoval označovat známé veličiny souhláskami, neznámé veličiny samoláskami.

Algebraická symbolika byla dále zdokonalována v XVII. století *René Descartem (1596 – 1650)*, který mimo jiné navrhl označovat známé veličiny písmeny z počátku abecedy a neznámé veličiny z konce abecedy.

Třetí období vývoje algebraické symboliky se vyznačuje používáním symbolů a znaků pro matematické operace, exponenty, využíváním písmen ve významu čísel a trvá od XV. století až do dneška. Nazývá se obdobím **symbolickým.**

Vývoj používání písmen lze ilustrovat příkladem:

Dnešní zápis rovnice $2x^3 + 5x = 7$ měl následující vývoj:

Ve druhé polovině 15. století: 2 cubus et 5 rebus aequales 7

V první polovině 16. století: 2 cubus p 5 rebus aequautur 7

Ve druhé polovině 16. Století: 2 C + 5 N aeru 7.

Algebraické vzorce

Na základní škole se žáci učí několik algebraických vzorců, které potřebují při úpravách lomených výrazů. Kvůli špatné představě žáci ve vzorcích dělají různé chyby. Předcházet jim se dá pomocí geometrických modelů, kdy součin dvou čísel (písmen) chápu jako obsah plochy.

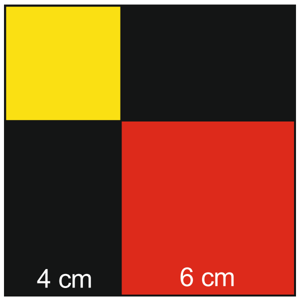
Odvození vzorce $(a+b)^2$ v devátém ročníku: Budeme pracovat se čtverečkovaným papírem. Načrtněte si svůj čtverec a rozdělte ho dvěma úsečkami na dva čtverce a dva obdélníky. Zapište obsahy celého čtverce a jednotlivé pravoúhelníky.

Je-li čtverec 7x7 rozdělen na úseky 3 a 4, platí:

$$(3+4)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2.$$

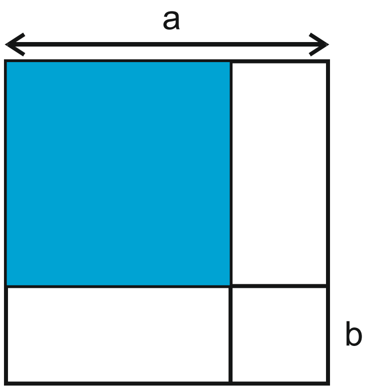
Každý student bude mít jiné velikosti. Jelikož se neví, jaké rozměry má můj čtverec, lze zapsat jen obecně:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

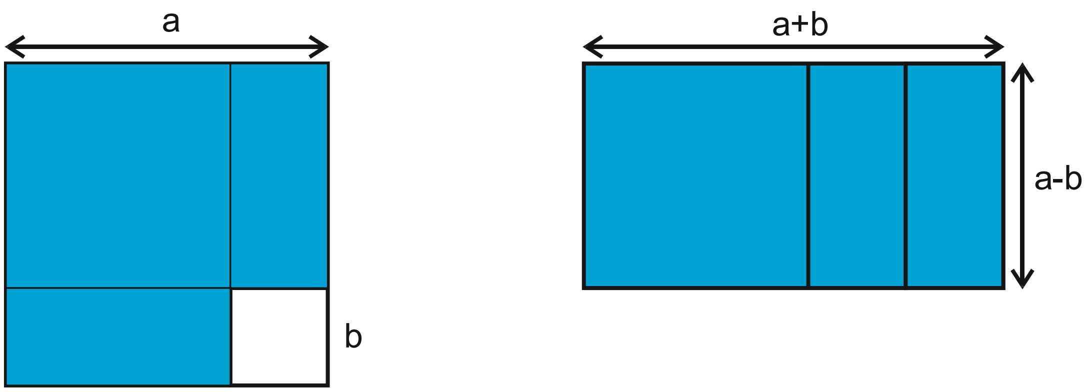


Je potřeba, aby žáci ovládali i další algebraické vzorce. Některé vzorce, jako $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, (a-b)^3, a^3 + b^3, a^3 - b^3$ si mohou modelovat analogicky, jako u binomické krychle. Tuto činnost je vhodné doporučit z důvodu hlubokého pochopení a zapamatování.

Vzorec $(a-b)^2$ lze odvodit takto: Stranu čtverce délky a rozdělíme na dva díly dlouhé b a $a-b$. Čtverec rozstříháme na čtyři části – čtverec o obsahu b^2, $(a-b)^2$ (modrá část) a dva obdélníky o obsahu $(a-b)b$. Platí $(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



Vzorec $a^2 - b^2$ odvozujeme následovně: Čtverec o délce strany a rozstříháme na čtverce o délce strany $a-b$ a b a dva obdélníky s délkami stran $a-b, b$. Malý čtverec dáme bokem a jeden obdélník přesuneme tak, aby vznikl velký obdélník s délkami stran $a-b$ a $a+b$. Modrá část má obsah $a^2 - b^2$ a platí $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.



Po fázi modelování musí následovat fáze fixace a zapamatování. Jak je vidět, činnost zabere mnoho času, pokud má být provedena důkladně. Zde máme druhý důvod, proč je algebra neoblíbená u žáků. Formálně a časově úsporně získané poznatky se nemohou efektivně ukotvit v žákově poznávacím procesu a nemohou tedy být využívány v složitějších příkladech, kde jsou zapotřebí.

Procvičování by nemělo probíhat pouze ve směru *součinový tvar → rozložený tvar*, ale i v opačném směru. Můžeme za tímto účelem nachystat dětem kartičky, které k sobě přiřazují:

$\boxed{(a+b)^2}$, $\boxed{(a-b)(a+b)}$, $\boxed{a^2+2ab+b^2}$, $\boxed{(a-b)(a-b)}$, $\boxed{(a-b)^2}$, $\boxed{a^2-b^2}$, $\boxed{a^2-2ab+b^2}$, $\boxed{(a+b)(a+b)}$

Vznikne např. řádek $\boxed{(a+b)^2}$ $\boxed{(a+b)(a+b)}$ $\boxed{a^2+2ab+b^2}$

Děti mohou mít i přes názorný úvod do algebry později problémy s interpretací algebraických výrazů. Stávají se jim potom chyby typu $a^2+2a=3a^2$ apod. Těmto chybám lze předcházet dvěma způsoby:

- opakovaně se vracet k dosazování číselných hodnot, např. $(2+5)^2$;
- algebraickým zápisům přisuzovat **geometrický význam**, tj. a je úsečka, a^2 je čtverec, ab je obdélník, a^3 je krychle. Děti si mohou rovinné útvary vystříhat z papíru (úsečka, čtverec, obdélník) a pracovat pomocí nich s polynomy. Např. $2a+3a^2+5a-a^2=7a+2a^2$. Tímto způsobem můžeme odvodit i roznásobení závorky $(a+b)c=ac+bc$: děti si vyrobí obdélník o základně $(a+b)$ a druhé straně c, vzniknou dva obdélníky, které mohou rozstřihnout a mají ac a bc.

Literatura

BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959

HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: SPN 1990, ISBN: 80-08-01344-3.

Běloun, F., a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ.* Praha: SPN, 1992

Kováčik, J.: *Řešené příklady z matematiky pro ZŠ a osmiletá gymnázia.* Praha: ASPI, 2008

Ženatá, E.: *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením.* Blug