1.2 Evropské učebnice praktické matematiky před r. 1480

Nejvyšší úroveň měly učebnice Leonarda Pisánského (= Fibonacciho) napsané už ve 13. století, které přenášely do Evropy již po staletí propracovávanou učebnicovou literaturu z Byzance, islámských zemí a Indie. Ostatní texty, které se používaly, byly chudší obsahem i metodami, vycházely buď přímo z Fibonacciho nebo z překladů starších autorů do latiny. V článku 2.2 druhého dílu skript jsme už poznali úryvky z několika učebnic scholastické epochy, nyní přejdeme do pozdějších staletí. Fibonacciho si připomeneme v úvodní ukázce, naznačíme tak i prioritu italských učebnic (psaných zprvu latinsky) v Evropě.

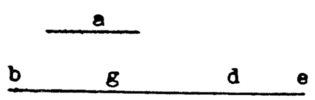
A. Leonardo Pisánský: Kniha o abaku

Dílo napsané v r. 1202 a přepracované v r. 1228 bylo velmi obsáhlé, pozdější tištěné vydání mělo rozsah 459 stran. Podrobné informace o knize je v Juškevičově knize, str. 362-374. Vybraná ukázka naznačuje vazbu na Eukleidovo geometrické znázornování veličin, operuje však také s termínem "majetek" pro druhou mocninu neznámé.

... Rozděl deset na dvě části a vyděl jednu druhou a druhou první a výsledky přičti k 10 a co tím dostaneš, násob jednou z částí a vyjde 114 .

Fibonacci nazývá jednu část "věcí" (res) ve významu "neznámá", znázornuje ji úsečkou .a. , na další přímce znázornuje číslo 10 a podíly částí, a to po řadě úsečkami .b.g. , .g.d , .d.e ; hovoří pak podle potřeby o úsečkách .b.e , .g.e. apod. "Majetek" (= census) je název pro čtverec nad .a. ; z finanční terminologie proniká i denár jako jednotka, číslo 1 .

Protože součin .a. s .b.e. dává 114 , součiny .a. s .b.g. , .a. s .g.d. , .a. s .d.e. dávají dohromady 114. Jestliže odečteme ... součin věci s číslem 10 , zbytek 114 minus 10 věcí je součin čísla .a. s .g.e. , jestliže od toho odečteš součin .a. s .g.d. ... pak zbude 104 minus 9 věcí pro součin .a. s .d.e. ...



Součin .a. s .d.e. se rovná podílu čtverce čísla .a. druhou částí, tj. 10 minus věc. Proto při násobení .a. sebou

samým vzniká majetek, při jehož dělení číslem 10 minus věc vzniká 104 minus 9 věcí. ... jestliže vynásobíš 10 minus věc tím 104 minus 9 věcí, dostaneš 1040 a 9 majetků zmenšených o 114 věcí, což se rovná majetku. Proto ... odečti vždy po jednom majetku od každé strany, tak zbude 8 majetků a 1040 denárů rovných 194 věcem, proto děl tento celek počtem majetků a dostaneš majetek a 130 denárů, které se rovnají 24 a čtvrt věci.

[Poslední kvadratickou rovnici už lze řešit podle pravidla pro příslušný typ; jde o páté pravidlo uvedené zde na str. 15 , kde je však slovo majetek vyjádřeno italským censo.]

Otázky a úkoly

1. Řešená úloha vede k soustavě rovnic s dvěma neznámými nebo k jedné rovnici s lomenými výrazy. Najděte oba zápisy, sledujte pak ten, který odpovídá Fibonacciho postupu.

2. Dokreslete geometrické útvary, které by doprovázely postup řešení při důsledném uplatňování geometrické algebry (součin = pravoúhelník).

3. Vyřešte úlohu tak, jak byste k ní přistoupili dnes, tj. bez ohledu na historické vzory.

B. Fridericus: Pravidla falešných předpokladů

Autor zpracoval v letech 1455 - 64 rozsáhlý rukopis, ze kterého se zachovaly jen zlomky. Šlo o sbírku pravidel a řešených příkladů s různorodou tématikou z praktické aritmetiky, kterou před 250 lety pokryl už Fibonacci. Použité metody pocházejí většinou ze starověku, používal je i Diofantos, čínští a indičtí matematikové.

(a) Úloha o třech druzích ptáků

Kdosi nakupuje za 40 zlatých 40 ptáků tří druhů: kachny, každou ze dva zlaté, slepice, každou za zlatku, holubice, každou za půl zlatky. Má se najít, kolik kachen atd.

Učiň dva předpoklady. Nejprve předpokládej 12 kachen, 20 slepic, 8 holubic, to je 40 ptáků, ale stojí 48 zlatých.

Je tak 8 zlatých v přebytku. Předpokládej proto druhou pozici (= situaci), totiž 9 kachen, 12 slepic, 10 holubic, to je 40 ptáků, ale stojí 44 zlatých, a tak přebývají 4 zlaté. Odečti tudíž 4 od 8, zbývají 4, to je společný dělitel. Potom násob 12 a 4 křížem, vyjde 48, dále opět křížem 9 a 8, vyjde 72, od toho odečti 48, zbude 24, ty děl čtyřmi [společným dělitelem], budeš mít 6 kachen. Potom násob 4 a 20, vyjde 80, obdobně 21 a 8, vyjde 168, od těch odečti 80, zbude 88, ty děl čtyřmi, vyjdou 22 slepice. Obdobně násob 8 a 4, vyjde 32, a násob 8 a 10, vyjde 80, od těch odečti 32, zbudou 48, ty děl čtyřmi, vyjde 12 holubic, a tak máš 6 kachen, 22 slepic a 12 holubic; 40 ptáků, kteří stojí 40 zlatých.

První předpoklad		Druhý předpoklad	
Kachny	12	9	kachen
Slepice	20	21	slepic
Holubice	8	10	holubic
plus	8	4	plus

4
dělitel

Také 12 kachen, 4 slepice, 24 holubic.

(b) <u>Úloha o dvou přátelích kupujících dva koně</u>

Jsou dva přátelé, kteří chtějí koupit dva koně. První chce koně za 20 zlatých, druhý za 25 zl. A říká první druhému: dej mi třetinu svých peněz, potom zaplatím koně právě za 20 zlatých. Ale druhý říká prvnímu: dej mi čtvrtinu svých peněz, pak já zaplatím přesně 25 zlatých. Chci nyní vědět, kolik má každý.

Nejprve zvol jeden falešný předpoklad, patrně to, že první má 12 zlatých, druhý 24. Tedy první říká druhému: dej mi třetinu svých peněz, zřejmě 24, a to je 8 k mým, to dělá 20 zlatých; ale druhý říká prvnímu: dej mi čtvrtinu svých peněz, totiž z 12, a tvrdí, to jsou tři. Přidej 3 k 24, vyjde 27, a těch 27 přesahuje 25 o dva.

Podruhé předpokládej, že první má 16 a druhý 12, tehdy se nedostává 9 zlatých. Protože pravidlo říká, že když v jedné pozici je nadbytek a ve druhé nedostatek, mají se spolu sečíst, a celek z nich je společný dělitel. Přidej tedy 2 k 9, vyjde 11. Potom násob křížem 9 a 12, vyjde 108, obdobně 2 a 16, vyjde 32, které přičti k 108, vyjde 140, ty když vydělíš [číslem] 11, vyjde $12\frac{8}{11}$ zlatých, ty jsou majetkem prvního. Obdobně násob 9 a 24, vyjde 216, a 2 a 12, vyjde 24, ty sečti navzájem, vyjde 240. Ty když vydělíš [číslem] 11, vyjde $21\frac{9}{11}$ zlatých, majetek druhého.

První předpoklad		Druhý předpoklad	
První	12	16	první
Druhý	24	12	druhý
plus	2	9	minus

11
dělitel

Otázky a úkoly

1. Pokuste se tentokrát vyřešit vyslovené úlohy nejdříve některou dnes užívanou metodou. Ke kterému typu úloh vede (a), ke kterému (b), máme-li na mysli i obor neznámých?

2. Označte volené hodnoty neznámých písmeny (parametry) a sledujte postup výpočtu předvedeného autorem. Porovnejte (a), (b). Zdůvodněte, zda úlohy mají či nemají jen jedno řešení.

3. Vyslovte jedno obecné pravidlo, které je zřejmé ze zápisů s parametry a které může nahradit dvě pravidla aplikovaná v ukázkách.

4. Najděte v 1. a 2. díle skript ukázky z textů jednotlivých epoch, kde se uplatnila metoda jednoho, resp. dvou, falešných předpokladů.

C. Německé učebnice algebry z doby kolem r. 1460

Jde o překladovou literaturu pro účely městských škol, kde se vzdělávaly děti obchodníků a řemeslníků, jež nestudovaly latinu.

(a) Tzv. Gerhardtova algebra

Do r. 1461 datovaný text mnicha Friderika je opisem díla, jež má úvod, který uvádíme; je dokladem počátků učebnicové literatury v národních jazycích. Šlo nepochybně o volný překlad latinské učebnice; latinské termíny v textu zůstávaly, symbolika ještě chyběla. Slovo "věc (= Ding)" znamenalo neznámý počet (jako latinské res, italské cosa).

Machmet ve své knize Algebra a almalcobula zavedl tato slova: census, radix, numerus. Census je každý počet, který byl sám v sobě vynásoben, je to numerus quadratus. Radix je kořen počtu nebo úroku. Numerus [číslo] je počet považovaný za sebe sama, není ani úrokem, ani kořenem.

Z počítání s věcmi uvedl šest případů: první, když se census rovná kořenům, druhý, když se census rovná číslu, třetí, když se číslo rovná kořenům, čtvrtý, když se census a kořeny rovnají číslu, jako když se řekne: jeden census a 10 kořenů se rovná 32 ; pátý je, když se census a číslo rovnají kořenům, šestý, když se kořeny a číslo rovnají censu.

(b) Regule delacose (= Pravidla pro výpočet neznámé)

Tento text prozrazuje vliv starších italských učebnic, které byly v jihoněmeckých městech známé. Po jazykové stránce je ještě pestřejší než text (a); zařazujeme ukázku, která jakoby nejprve rekapitulovala druhý odstavec z (a). [Německá slova jsou nahrazena českými, italská a latinská jsou ponechána.] Ukázka pokračuje citací několika pravidel.

První: Cosa se rovná numero.
Druhý: Censo se rovná numero.
Třetí: Cosa se rovná censo.
Čtvrtý: Censo a cosa rovná se numero.
Pátý: Censo a numero rovná se cosa.
Šestý: Cosa a numerus rovná se censo.

. . . . .

Capitulum quartum

Když počet, to je numerus, rovná se věci, to je cosa, a censo, pak je třeba dělit tím censo, pak cosa, to jest věc, rozpůlit a tu polovinu samu sebou vynásobit, a co se pak dostane, máš připočítat k počtu, a radix součtu bez poloviny věcí je hodnota věci.

Capitulum quintum

Když cosa, to je věc, rovná se počtu, to je numero, a censo, pak je třeba dělit tím censo všechny věci, a rozpůlit ty věci, a vynásobit tu polovinu samu sebou a odečíst ty počty, radix z toho [rozdílu] odečtený od poloviny věcí je hodnota věci.

Capitulum sextum

Když se censo rovná věci a počtu, pak je třeba dělit tím censo, rozpůlit věci a násobit [v orig. multiplicírovat] polovinu jí samou, a co vyjde, je třeba sečíst s počtem, a radix součtu spolu s polovinou věcí je hodnota věci.

Pozoruj, co je censo, věc a cubo:

Násobit věc a věc dává censo.
Násobit věc a censo dává cubo.
Násobit věc a cubo dává censo de censo.
Násobit censo de censo a věc dává duplex cubo.
Násobit censo a censo dává censo di censo.
Násobit cubo a cubo dává cubo di cubo.

Otázky a úkoly

1. O kterého Machmeta jde v úvodu ukázky (a)? Jak se přesně jmenuje spis, který je trochu zkomoleně citován? Zavedl přímo ta slova, která jsou v ukázce uvedena?
2. Pomocí dnes obvyklých výrazů ax^2 , bx , c pro census, věc a počet zapište šest typů rovnic uvedených v závěru ukázky (a) a v úvodu ukázky (b).
3. Symbolickými zápisy výrazně rozlište tři typy kvadratických rovnic (čtvrtý až šestý případ) a zapište postup jejich řešení. [Pamatujte, že "dělit tím censo" znamená dělit koeficien-

tem v ax^2 a že "dělit (rozpůlit) ty věci" znamená dělit (dvěma) koeficient u neznámé x.]

4. Porovnejte poslední odstavec pravidel s učebnicí Diofantovou z doby před 1200 léty [viz str. 11 v 2. dílu skript] .

5. Ukažte, jak zde citované texty ilustrují tvrzení obsažená ve výkladové části druhého dílu skript na str. 130-2.

1.3 Počátky symbolické algebry

Obdobně nazvané články v Juškevičově knize (str. 407 a další) a ve druhém dílu těchto skript (čl. 4.2) obsahují podrobnější souvislý výklad. Zde zařazujeme jen ukázky zápisů jako dobové doklady tohoto procesu.

A. Zkratková symbolika cossistů pro neznámou a její mocniny

V italských městech už od 13. století, za Alpami až od poloviny 15. století vznikaly společenské podmínky pro výuku praktické matematiky v městských školách. Jejich učitelé nerozvíjeli teoretické základy matematiky obsažené v díle Fibonacciho, ale při častém používání některých praktik nacházeli výhodná zjednodušení výpočtů s arabskými číslicemi i zápisů algebraických úvah. Mezi ně patřily zkratky ustálených názvů pro neznámou a její mocniny.

(a) Zkratkové symboly Pacioliho, Rieseho a Rudolffa

Luca Pacioli (kol. 1445 - 1514) pocházel z kupecké rodiny, vyučil se v malířské dílně, krátce vedl obchod, v 27 letech se stal řeholníkem a začal přednášet matematiku na univerzitách. Dílo "Summa aritmetiky, geometrie, poměru a úměrnosti" dokončil v r. 1487, tiskem vydal v r. 1494. Šlo o encyklopedii praktické matematiky pro kupce, včetně výkladu o vedení účetních knih. V kapitolách věnovaných algebře shrnul a dále používal zkratky zavedené v Itálii během tří staletí od doby Fibonacciho.

Adam Riese (1492 - 1559) byl od r. 1515 důlním úředníkem v saském Annabergu, zároveň vyučoval v městské škole a po 40 let psal učebnice praktické matematiky v němčině.

Christoph Rudolff (kol. 1500 - 1545) pocházel ze slezského Javoru, vyučoval ve Vídni, svou knihu vydal ve Štrasburku v r. 1525; užíval stejnou symboliku jako Riese.

Pacioli		dnes	Riese, Rudolff
numero	n^o	x^0	φ dragma
cosa	co	x^1	℘ cosa, radix
censo	ce	x^2	𝔷 zensus
cubo	cu	x^3	𝔠 cubus
censo de censo	ce.ce	x^4	𝔷𝔷 zensus de zensu
primo relato	$p^o.r^o$	x^5	β sursolidum
censo de cubo	ce.cu	x^6	𝔷𝔠 zensicubus
secundo relato	$2^o.r^o$	x^7	bβ bisursolidum
censodecenso de censo	ce.ce.ce	x^8	𝔷𝔷𝔷 zensus zensui de zensu

(b) Zkratkové symboly Grammatea, Scheubela a Salignaca

Grammateus (= Heinrich Schreiber) napsal svou početnici (Rechenbüchlin) v r. 1518.

Johann Scheubel (1494 - 1570) byl profesorem v Tübingen, svou učebnici vydal v r. 1551, převzal symboliku Grammateovu, jen "prima quantitas" nahradil slovem radix a symbolem ra .

Petrus Ramus (1515 - 1572) byl francouzským učencem, psal spisy nejen z logiky, ale i matematiky; Salignac byl jeho žák, který působil v Německu, jejich symboly pocházely z latinských slov.

Grammateus, Scheubel		dnes		Ramus, Salignac
numerus	N	x^0		
prima quantitas	pri.	x^1	ℓ	latus
secunda -"-	se.	x^2	q	quadratus
tertia -"-	ter.	x^3	c	cubus
quarta -"-	quar.	x^4	bq	biquadratus
quinta -"-	quin.	x^5	s	solidus
sexta -"-	sex.	x^6	qc	quadraticubus apod.

(c) Zápisy výrazů a výpočtů v cossistické algebře

Grammateus

```
   6 pri. + 8 N.
      krát
   5 pri. - 7 N.
 ---------------------
 30 se. + 40 pri.
        - 42 pri. - 56 N.
 ---------------------
 30 se. -  2 pri. - 56 N.
```

Stifel

```
  6𝔷   + 8℘   - 6
  2𝔷   - 4
 ------------------------------
 12𝔷𝔷 + 16𝔠  - 12𝔷
             - 24𝔷  - 32℘  + 24
 ------------------------------
 12𝔷𝔷 + 16𝔠  - 36𝔷  - 32℘  + 24
```

Salignac

$$\left[\frac{\frac{6tq}{2c}}{5\ell}\ \text{k}\ \frac{\frac{10s}{2bq}}{3c}\right]\quad \frac{2c}{5\ell}\ \text{k}\ \frac{2bq}{3s}\quad \text{celé je}\ \frac{6tq+10s}{5qc}\ \text{nebo}\ \frac{6c+10}{15\ell}$$

$$\underbrace{3s\qquad 5\ell}_{15qc}$$

tq ... triquadratus = x^8

Scheubel

$\frac{15se. + 20ra}{12ra}$ děleno $\frac{6pri + 8N}{9pri}$ se rovná $\frac{45ter + 60pri}{36pri}$ děleno

$\frac{24pri + 32N}{36pri}$ rovná se $\frac{45ter + 60pri}{24\ pri + 32N}$

(d) Zápisy rovnic

2 z 10 co rovno numero 28

1 z 27 numero se rovná 5 cosa (doplňky k Fridericovi)

z^0 a 6 numero se rovná 5 cosa

2 se. + 18 N. se rovná 15 pri (Grammateus)

2 se. + 500 N. se rovná 95 $\frac{1}{3}$ pri.

4z + 8 φ rovno 12 φ (Rudolff)

5d + 9 φ rovno 14 $\frac{1}{2}$ φ

(e) Zápisy řešení slovních úloh v cossistické algebře

Fridericův text (citovaný v čl. 1.2) se dochoval s pozdějšími doplňky, které obsahují přepis původních slovních formulací v německé cossistické symbolice. Podstatná je volba "věci" označené 1φ , pak řešení postupuje tzv. přímou metodou (na rozdíl od metody falešných předpokladů).

Kdosi má peníze, žádá od přítele 1 a bude mu roven. Druhý žádá 1 a bude mít dvojnásobek.

Předpokládejme, že vše dohromady, co mají, je 1φ . První tudíž má $\frac{1}{2}\varphi$ minus 1 , druhý má $\frac{1}{2}\varphi$ a 1 . Když tudíž první dá 1 druhému, první bude mít $\frac{1}{2}\varphi$ minus 2 , a druhý bude mít

$\frac{1}{2}\varphi$ a 2 , kteréž se mají rovnat dvojnásobku prvního, což je 1φ minus 4 .

1φ minus 4 se rovná $\frac{1}{2}\varphi$ a 2

$\frac{1}{2}\varphi$ se musí rovnat 6 , vychází tedy φ 12

První tedy má 5 , druhý 7.

Máme [přátele] a, b, c . A žádá 1 od b , a bude mu roven; b žádá 1 od c a bude mít dvojnásobek než c; c žádá 1 od a, bude mít trojnásobek než a.

Předpokládejme, že první má 1φ , pak druhý má 1φ a 2 a třetí má $\frac{1}{2}\varphi$ a 2 $\frac{1}{2}$. Tomu když dá první 1 , bude mít třetí $\frac{1}{2}\varphi$ a 3 $\frac{1}{2}$, a první si ponechá 1φ minus 1 , čehož trojnásobek 3φ minus 3 se musí rovnat

3φ minus 3 $\frac{1}{2}\varphi$ 3 $\frac{1}{2}$

2 $\frac{1}{2}\varphi$ 6 $\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}\varphi$ se má rovnat $\frac{13}{2}$

Vychází: 1φ 2 $\frac{3}{5}$ má první, 4 $\frac{3}{5}$ druhý, 3 $\frac{4}{5}$ třetí.

Otázky a úkoly

1. Ukažte společné rysy tvorby zkratek pro mocniny neznámé v různých jazycích, které jsou uvedeny v (a), (b).
2. Přepište zadání úloh v (c) dnešním způsobem a zdůrazněte rozdíly v postupu výpočtů. V čem byla hlavní nevýhoda cossistické symboliky?
3. Zapište rovnice v (d) a řešení úloh v (c) pomocí x, +, -, =, jak je dnes obvyklé. V čem se předvedený postup liší od Diofantova? V čem souhlasí s naším postupem?

B. N. Chuquet: Trojdílná učebnice vědy o číslech

(Dílo bylo dokončeno v r. 1484, zůstalo v rukopise do 19. století.)

Nicolas Chuquet z Paříže působil v Lyonu, který byl proslulý řemesly a obchodem; společenské podmínky v něm se podobaly italským městům, proto i zájem měšťanů o praktickou aritmetiku byl značný. Lze předpokládat existenci učebnic pro vzdělávání dorostu kupců, řemeslníků a finančníků. Chuquet, ač především lékař, sepsal učebnici "Le Triparty en la science des nombres", která je věnována počítání s racionálními čísly, počítání s iracionálními čísly a teorii rovnic. Originální je Chuquetova symbolika pro mocniny neznámé (viz díl II, str.131), včetně záporných celých exponentů (denominací):

$.2^{0}. \ldots 2 \quad , \quad .2^{1}. \ldots 2x^{1} \quad , \quad .2^{2}. \ldots 2x^{2} \quad , \quad .2^{1\tilde{m}}. \ldots 2x^{-1}$

Chuquetovo dílo, ač bylo opisováno jen ručně, bylo známé a rozšířené.

(a) Násobení mocnin

Ten, kdo násobí .12^{0}. opět .12^{0}. , dostává .144. , protože kdo přičítá .0. k .0. , dostává .0. ; tudíž násobení dává .144. .

Ten, kdo násobí .12^{0}. číslem .10^{2}. , musí nejprve vynásobit .12. číslem .10. , což dává .120. , a pak se musí přidat .0. k .2. Tudíž násobení dá .120^{2}. Touž úvahou ten, kdo násobí .5^{1}. číslem .8^{1}. , dostává součin .40^{2}. .

Ten, kdo si přeje násobit .12^{3}. číslem .10^{5}. , musí nejprve násobit .12. s .10. , dostane .120. , pak musí sečíst spolu denominace, což je .3. a .5. dávající .8. . Tudíž násobení dává .120^{8}. .

Také ten, kdo si přeje násobit .8^{1}. s .$7^{1\tilde{m}}$. , dostane jako součin .56. , pak ten, kdo sčítá denominace, dostane

.1.$\tilde{p}$ s .1.$\tilde{m}$ a dostane 0 .

Tak získá součin .56^{0}.

Obdobně ten, kdo by násobil .8^{3}. číslem .$7^{1\tilde{m}}$. , shledá výhodné vynásobit .8. krát .7. , dostane .56. , pak musí sečíst denominace, vezme .3.$\tilde{p}$ s .1.$\tilde{m}$ a dostane .2. Tudíž násobení dává .56^{2}. a tímto způsobem musíme chápat ostatní problémy. ...

(b) O ekvipolencích čísel

... Abychom lépe rozuměli tomu, co bylo výše řečeno o tomto umění a způsobu zkracování a porovnávání stran partií a přivádění jich k dvěma jednoduchým výrazům ..., podáme zde některé

příklady, z nichž první je tento (budu ho zkracovat):

R_x^2 .4^2.$\tilde{p}$. 4^1. $\tilde{p}$ .2^1.$\tilde{p}$. 1 se rovná .100^3.

Nejprve odstraním .2^1.$\tilde{p}$ .1 z obou stran a zbude mi R_x^2 .4^2.$\tilde{p}$.4^1. na jedné straně a 99.$\tilde{m}$.2^1. na druhé. A nyní, když je jedna strana druhou odmocninou, je výhodné násobit ji jí samotnou, dostaneme .4^2. .1. $\tilde{p}$ .4^1. na této straně. A obdobně musíme násobit .99.$\tilde{m}$.2^1. jí samotnou a dostaneme 9801.$\tilde{m}$.396^1.$\tilde{p}$.4^2. na druhé straně. Nyní musíme ještě zkrátit tyto výrazy odečtením .4^2. od jedné i druhé strany. A pak přičíst .396^1. ke každé z nich. Tak dostaneme .400^1. na jedné straně a .9801. na druhé straně.

Otázky a úkoly

1. Připomeňte si Chuquetovu symboliku a uplatněte její současný přepis při překladu Chuquetových příkladů násobení mocnin neznámé.

2. Obdobně zpracujte úsek o ekvipolencích; zapište rovnici a její řešení v dnes obvyklém sloupci rovnic.

1.4 České praktické početnice ze 16. století

V článcích 1.2 a 1.3 jsme poznali ukázky z německých početnic, které zahrnovaly dobový způsob řešení úloh tradovaných po staletí. Stejné úlohy byly obsaženy v italských, francouzských, nizozemských učebnicích a objevily se i v českých učebnicích během 16. století. Do ukázek v tomto článku vybíráme úlohy několika typů, které jsme dosud neuvedli.

A. Nové knížky vo počtech na cifry a na liny ...
(Spis Ondřeje Klatovského vydaný r. 1530)

Ondřej Šimkovic zvaný Klatovský (1504 - 1551) se stal bakalářem na pražské univerzitě, byl členem družiny humanistů. Pro účast na rebelii proti Ferdinandu I. byl r. 1547 vypovězen z Čech, zemřel v Olomouci. Svůj spis vydal tiskem v Norimberku; jazyk spisu odpovídá úrovni prvních spisů v národních jazycích, tj. hovorová čeština je propletena latinskými odbornými termíny. Slovo "facit" ve zkratce fa znamená "(to) dělá".

Spis je rozdělen do čtyř traktátů: O počítání na cifrách. O počítání na linách. O zlomcích. O rozličném běhu kupeckém. Poslední traktát obsahuje různá pravidla (regule). Popisy, výklady a návody k výpočtům jsou velmi podrobné, doplněné mnoha vyřešenými příklady a úlohami k procvičení. Klatovský uvádí didaktické poznámky, řadí úlohy od jednoduchých ke složitějším, připojuje tabulky převodů měr, vah a peněz.

(a) Násobení pomocí číslic a doplňků do deseti

První regule

Této regule užívati budeš při multiplicovaní až do 9 krát 9 takto: Ty figury, které by spolu multiplicovati chtěl, posaď jednu nad druhú puncti při nich zdělaje, jedné každé její rozdíl posaď podle ní za punctem, to jest, co se nedostává od té figury k deseti, podtrhni pod nimi linu. Potom ty rozdíly multiplicuj spolu, to což odtud vyjde, jestliže v jednom počtu bude, ten posaď rovně dole pod linu, pakli dvěma, tehdy z nich první posaď a druhý schovej, hned pak jedné figury (na kříž) rozdíl odejmi od druhé a zbytek též rovně pod nimi posaď, kterému ten počet (až bylby) přidej a budeť uděláno.

Exemplum

9. 1	7. 3	9. 1	5. 5	8. 2
9. 1	8. 2	7. 3	5. 5	8. 2
fa 8 1	fa 5 6	fa 6 3	fa 2 5	fa 6 4

(b) Regule de tri (trojčlenka)

Pravidlo jsme poznali ve 2. dílu na str. 31 v ukázce z indické početnice, tradovalo se v nezměněné podobě. Pro porozumění textu dodejme: jeden florén (fl) se rovnal 20 šilinkům; slovo loket se zkracovalo na "lo".

Item jeden koupil 10 loket $\frac{2}{3}$ za 8 fl , zač se dostane 9 loket $\frac{2}{5}$, facit 7 fl, 1 šilink.

$10\frac{2}{3}$ lo · 8 fl $9\frac{2}{5}$ lo

První a zadní počet vnes v celé, jmenovatelem prvního počtu multiplicuj zadní, produkt s zadním jmenovatelem přední, stane takto:

(c) Regule de quinque (pětičlenka)

Také toto pravidlo je vysloveno ve 2. dílu (str. 32); během staletí se pozměnil jeho grafický záznam, jak uvidíme v ukázce. Vynásobením čísel, jež jsou umístěna pod sebou, vznikl řádek, na který se aplikovala regule de tri.

Regule quinque dělej takto: postav ze dvou prvnějších počtů jeden pod druhý, ... třetí počet samostatně do prostředku a na tom místě toho státi nech, poslední dva též jeden pod druhý postav, potom multiplikuj přední dva spolu; produktu napřed státi nech, poslední dva též spolu multiplikuj, a nech z zádi stát, potóm dělej podle reguli de tri.

Item 18 nadennikuov v 6 dnech skopaly 12 strychu vinicí. Votázka, kolik strychuov 5 nadennikuov v 30 dnech skopají.

Stojí v reguly:

dielni	18	stry	5 nadenniku
		12	
dnech	6		30 dnech
	108	12	150

fa: 16 strychuov $\frac{6}{9}$

Otázky a úkoly

1. Vyložte postup popsaný v (a) na numerických příkladech; pak zvolte parametry a, b pro činitele a pořiďte záznam postupu pomocí nich. Ukažte, které dvojice sobě rovných výrazů jsou teoretickým základem metody.

2. Projděte krok za krokem řešení úlohy (b), vyslovte pravidlo a jeho aplikací zkontrolujte výsledek. Pak ukažte dnes obvyklý způsob řešení dané úlohy, porovnejte ho s regulí de tri.

3. Ukažte aplikaci pravidla, podle kterého se údaje v (c) zapíší a úloha se vyřeší. Pak předveďte dnešní způsob řešení.

4. Jak by vypadala řešení úloh (b), (c) podle indických pravidel?

5. Odpovídá dnes užívaný postup při řešení úloh (b), (c) nějaké obecnější metodě než byly regule de tri, regule de quinque?

B. Knížka Jiřího Mikuláše Brněnského z r. 1567

Autor se narodil na počátku 16. století, r. 1526 se stal mistrem univerzity ve Wittenbergu, po určitou dobu řídil školu v Úsově na Moravě, pak působil v Praze, kde si v r. 1566 otevřel vlastní školu. Pro její potřebu napsal spis "Knížka, v níž obsahují se začátkové umění arithmetického ...". Při výběru úloh čerpal především z Klatovského, například úloha (c) z odst. A je i v jeho knížce. Také úloha, kterou uvedeme, bude ιám povědomá z čl. 1.2 .

Regula falsi

n chce koupiti za 40 grošů trojích živočichů, jakožto hu-
uřat a holubů, též na počtu za 40 a prodává se jemu jed-
ι za 2 groše, 1 kuře za 1 groš a 2 holubi za 1 groš.
ízka, kolik každého živočichu koupiti má.

husí	12	9 husí
kuřat	20	21 kuřat
holubů	8	10 holubů
	+8	4+

divisor 4

takto: počty, kteříž jsou postaveni proti le-
ější falešný počty. A tyto ježto proti pravé
ruzý falešný počty, a jest jich 40 .

očich v prvním falešném počtu podlé těch
z, totižto 1 hus za 2 gr. alb. a jedno
ehdy přijde 48 gr. alb. Tento postavenej
liš vo 8, jakž dole stojí.

ešný počty, každou věc obzvláštně po-
ijde 44 gr. alb., to klamá příliš
ěť 4, to jest tvůj divisor, jakž do-

h falešných počtuov s tým menším
tehdyť přijdou ...

[Řešení souhlasí postupem i výsledkem s čl. 1.2 .]

C. Aritmetika Jiřího Goerla z r. 1577

Autor byl Němec, žil v letech 1550 - 91; v Litoměřicích se naučil česky a přesídlil do Prahy. Svou německou učebnici aritmetiky přeložil do češtiny a vydal v r. 1577. Stal se císařským notářem v r. 1587, ale zemřel poměrně mlád.

Geometrická posloupnost (z kapitoly O lichvě)

Jeden měštěnín vypůjčil sobě v židech na lichvu 350 zlatých českých od jednoho Žida, kterýžto na ten způsob mu půjčil, aby každý rok ze 100 zl. dal 6 zl. a druhý rok z těch 6 zl. zase lichvu tak dlouho dokudby jich užíval. Ten měštěnín užíval těch peněz 4 léta. Otázka, co musí tomu Židu z té hlavní sumy, lichvy a lichvy z lichvy dáti.

Operacio

Posaď 100 zlatých 4krát, jedno pod druhým, kterýžto multiplikuj jedné v druhý, produkt posaď do prostředku regule de tri. 100 zl. vodtud ta lichva jde, ty posaď naproti 100 zl. s ziskem také 4krát, multiplikuj též podobně jeden v druhý produkt posaď napřed a sumu, kterouž jest vypůjčil, nazad, a stojí takto:

106	-100
106	-100
106	-100
106	-100
126 247 696	100 000 000

100 000 000 zl. dá mi 126 247 696 zl. Co mi dá 350 zl.? Facit 441 zl. 52 gr. 0 penízů 0 malých , $\frac{707}{3125}$ díl jednoho malého.

[Poslední údaj lze získat jen převodem měn: 1 zlatý = 60 grošů, 1 groš = 7 bílých penízů (gr. alb.).]

Otázky a úlohy

1. Sledujte text v odst. B a porovnejte ho s postupem v čl. 1.2 při řešení obdobné úlohy. Pro které dnešní české termíny jsou použity termíny latinské?

2. Proveďte postup popsaný v ukázce C včetně trojčlenky.

3. Zapište současný způsob řešení úlohy o geometrické posloupnosti.

1.5 Symbolika algebraických textů v letech 1540 - 1580

Vracíme se k sledování formální stránky algebraických textů ve vrcholném období evropské renesance, abychom vystihli zrod symbolické algebry. Na rozdíl od dosavadních článků soustředíme zájem na texty italské.

A. Cardanovo dílo Ars magna z r. 1545

Girolamo Cardano (1501 - 1575), lékař a matematik, vydal spis "Veliké umění aneb o algebraických pravidlech", ve kterém poprvé publikoval metody řešení polynomických rovnic 3. a 4. stupně (viz 2. díl, str. 132-4). Zcela obecné úvahy formuloval Cardano jen slovně, v numerických příkladech používal typicky italskou symboliku.

Jak už víme, rovnice typu $x^3 + px = q$ formuloval Cardano "krychle a věci rovnají se číslu"; v obecném pravidle, jak určit "hodnotu věci", hovoří o počtu věcí (číslu p) a o číslu (číslu q).

(a) Řešení kubických rovnic

Pravidlo

Utvoř krychli z třetiny počtu věcí, přičti čtverec poloviny čísla, najdi kvadratický kořen toho celého, který použiješ v jednom případě tak, že k němu přičteš polovinu čísla, kterou jsi už jednou násobil s ní samotnou, ve druhém případě odečteš touž polovinu, a tak budeš mít dvojčlen [součet] a rozdíl. Potom odečti kubický kořen rozdílu od kubického kořene dvojčlenu, rozdíl je hodnotou věci.

V původním latinském textu pravidla užil Cardano jen zkratku ℞ pro radix = kořen, q místo "kvadratický", symbol & místo et = a . V bezprostředně následujícím příkladu je sloupec zcela symbolických zápisů a vedle neho slovní text s mnoha zkratkami.

Například, krychle a šest věcí rovná se 20; povyš 2, třetinu z 6, na krychli, to dá 8, násob 10, polovinu čísla, sebou samým, to do 100; sečti 100 & 8, vyjde 108, utvoř kořen, který je ℞108, & užij ho, nejprve k němu přičti 10, polovinu čísla, poté odečti totéž a dostaneš dvojčlen ℞108 p : 10 , & rozdíl ℞ 108 m : 10 , z nich vezmi ℞^{es} cub^{as} & odečti onen z rozdílu od toho, který je ze součtu, budeš mít hodnotu věci, ℞v : cub : ℞108 p : 10 m : ℞ v : cubica ℞ 108 m : 10 .

cub^9 p : 6 reb^9 aeq̄lis 20
2 2
8 ——— 10
108
℞ 108 p : 10
℞ 108 m : 10
℞v : cu. ℞ 108 p : 10
m : ℞v : cu. ℞108 m : 10

(b) Počítání s imaginárními čísly

Ponecháme opět symboliku původního textu, abychom poznali Cardanovy způsoby zápisů imaginárních čísel. Naše ukázka je převzata ze 37. kapitoly knihy, ale zápisy imaginárních čísel se v ní objevily už dříve.

Dám příklad: Řekne-li vám někdo, rozděl 10 na dvě části tak, že jedna vynásobena druhou dá 30 nebo 40, je zřejmé, že takový případ či otázka je nemožná. Nicméně ji budeme řešit. Rozdělme 10 rovným dílem & budiž jeho polovina 5, vynásob ji sebe samou, vyjde 25. Od 25 odečti součin, to je 40, což dá, jak jsem tě učil v kapitole o operacích v knize šesté, zbytek m : 15 , jehož ℞ přičtený a odečtený od 5 ukáže části, které navzájem vynásobené dají 40, budou to tyto: 5 p : ℞ m : 15 & 5 m : ℞ m : : 15 .

(c) Řešení rovnice 4. stupně

Cardano uveřejnil řešení, které objevil Ludovico Ferrari (1522 - 1565). Vtip řešení rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ je v tom, že se přejde k rovnici

$$(x^2 + p + y)^2 = x^2(p + 2y) - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$$

a diskriminant pravé strany se položí rovným nule, aby se nalezla vhodná p, y . Tak vznikne rovnice 3. stupně pro neznámou y . Ferrari řešil rovnici $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, Cardano označil neznámou jako "posici" zkratkou pos (= positio), symbol q̄dq̄d znamená quadratoquadratus.

... přidej na každou stranu [řešené rovnice] 6 čtverců a budeš mít 1 q̄d q̄d p : 12 q̄d p : 36 rovná se 6 q̄d p : 60 posic.
... Ale 1 q̄d q̄d p : 12 q̄d p : 36 má kořen, který je 1 q̄d p : 6. Kdyby 6 q̄d p : 60 posic mělo kořen, byli bychom hotovi, ale to není, tudíž musíme přidat tolik čtverců a nějaké číslo na každou stranu, aby na jedné straně mohl zůstat trojčlen mající kořen, zatímco na druhé straně to nastane také. Budiž tedy počet čtverců neznámou ...

[na základě geometrického schematu se zjišťuje:]
... na každou stranu je třeba přidat 1 q̄d p : 12 posicí a také 2 posice v počtu čtverců. Budeme opět mít, jak každý vidí, tyto kvantity sobě rovné:

1 q̄d q̄d p : 2 pos. p : 12 q̄dR_x p : 1 q̄d . p : 12 pos. přidaných p : 36

rovná se

2 pos. 6 čtverců, p : 60 pos. p : 1 q̄d p : 12 pos. přidaných
Každá strana bude mít kořen, první podle pravidla ..., ale druhá podle předpokladu, že totiž první část [člen] trojčlenu vynásobený třetím vytvoří čtverec poloviny druhé části trojčlenu. Protože z poloviny druhé části násobené sebou vyjde 900 čtverců & z součinu první s třetí vyjdou 2 krychle p : 30 čtverců p : 72 posic čtverců; obdobně bude ... [po zkrácení] ...

2 cu . p : 30 čtverců p : 72 posic rovná se 900, tudíž
1 cu . p : 15 čtverců p : 36 posic rovná se 450 .

[Podle pravidel pro řešení kubických rovnic se určuje hodnota neznámé, jež udává počet čtverců:]

R_xv: cubica $287\frac{1}{2}$ p: R_x80449 $\frac{1}{4}$ p: R_xv: cubica $287\frac{1}{2}$ m: R_x80449 $\frac{1}{4}$m:5

To je tedy počet čtverců, který se má po zdvojení přidat na obě strany ..., čtverec [tohoto počtu] je číslem, které se má přidat spolu s 12tinásobkem na obě strany.

Otázky a úkoly

1. Proč Cardano nepoužíval v obecných návodech takřka žádnou algebraickou symboliku, ale v příkladech ji uplatňoval hojně?

2. Přepište sloupec symbolických zápisů v ukázce (a) v dnešní

symbolice a výsledek porovnejte se zápisem, kterým byste rovnici řešili sami.

3. Dnešními prostředky zapište odstavec (b), tj. řešení rovnice 2. stupně s komplexními kořeny.

4. Podle úvodu k ukázce (c) přepisujte Ferrariho postup do dnešní podoby (pomocnou neznámou označte y); řešení dokončete zápisem kořenů rovnice 4. stupně. Co rozumí Cardano slovy "trojčlen má kořen"?

B. Dílo "Algebra" Rafaela Bombelliho z r. 1572

Autor byl inženýr a matematik, pracoval zejména v Bologni; ve své knize (vyšla posmrtně) chtěl vyložit základy algebry jasněji než Cardano. Přístupně objasnil počítání s imaginárními čísly, jeho obrat "meno di meno" se stal úslovím; s komplexními čísly počítal jako s mnohočleny. V algebraické symbolice zavedl nový způsob zápisu mocnin neznámé, který si ukážeme.

(a) Počítání s odmocninami záporných čísel

Nalezl jsem jiný rod spolu souvisejících kubických kořenů, které se významně odlišují od těch, které vznikají při řešení rovnic typu "krychle se rovná kořenům a číslu", když krychle třetiny kořenů je větší než čtverec poloviny čísla ..., kvadratické kořeny toho druhu se při počítání řídí pravidly odlišnými od těch, která platí pro ostatní kořeny, a mají zvláštní názvy.

... rozdíl čtverce poloviny čísla a krychle třetiny kořenů se nemůže nazvat kladný ani záporný, proto je budu nazývat plus z minusu [più di meno], když se má přičítat, a minus z minusu [meno di meno] v případech, kdy se má odčítat.

... kořeny tohoto druhu se budou mnohým jevit spíše jako sofistické než jako něco, co má reálný význam; tento názor jsem zastával do doby, než jsem našel důkazy na přímkách.
...

Plus krát plus z minusu dává plus z minusu.
Minus krát plus z minusu dává minus z minusu.
Plus krát minus z minusu dává minus z minusu.
Minus krát minus z minusu dává plus z minusu.

Plus z minusu krát plus z minusu dává minus.
Plus z minusu krát minus z minusu dává plus.
Minus z minusu krát minus z minusu dává minus.
Minus z minusu krát plus z minusu dává plus.

(b) Řešení kvadratických rovnic

Nechť $2\overset{2}{\smile}$ p.12 $\overset{1}{\smile}$ se rovná 32. Zkrátíme-li to na $1\overset{2}{\smile}$, ..., dostaneme $1\overset{2}{\smile}$ p . $6\overset{1}{\smile}$ se rovná 16. ... vezmeme-li polovinu lineárních veličin, tj. 3 , a přičteme ji ke straně čtverce [v orig. lato di quadrato] , tj. k $1\overset{1}{\smile}$, dostaneme $1\overset{1}{\smile}$ p . 3 . Čtverec tohoto výrazu bude roven $1\overset{2}{\smile}$ p . $6\overset{1}{\smile}$ p.9. Ale my jsme chtěli jen $1\overset{2}{\smile}$ p . $6\overset{1}{\smile}$; proto když přičteme 9 k oběma částem, dostaneme $1\overset{2}{\smile}$ p . $6\overset{1}{\smile}$ p . 9 rovná se 25 . Najdeme stranu čtverce $1\overset{2}{\smile}$ p . $6\overset{1}{\smile}$ p . 9 , dostaneme $1\overset{1}{\smile}$ p . 3 , které se rovná straně z 25 , tj. 5 . Když teď od obou částí odebereme 3 , zůstane 2 rovná se $1\overset{1}{\smile}$, hodnota neznámého [v orig. tanto = tolik] bude 2 .

Otázky a úkoly

1. Použijte zápisu $x^3 = px + q$ rovnice, o které mluví Bombelli, a vyjádřete pomocí x, p, q další jeho úvahy. Co rozumí "třetinou kořenů" ?
2. Kde Bombelli vyjadřuje skutečnost, že komplexní čísla nelze porovnávat vztahem "menší než, větší než" s nulou?
3. Pomocí symbolů $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $-b\sqrt{-1}$, při kladném b , vyjádřete obsah osmi Bombelliho pravidel. Použijte též i, -i, bi, -bi ke zkrácenému vyjádření těchto pravidel.
4. Přepište Bombelliho text v (b) pomocí symbolů x^2, x, + místo $\overset{2}{\smile}$, $\overset{1}{\smile}$, p . Za jakých předpokladů je jeho postup správný?
5. Kterému autoru z dosud uvedených je Bombelli svou symbolikou blízký? Je moderní symbolice bližší než Cardano? Proč?

1.6 Nové způsoby výpočtů navržené po r. 1580

Kupecké počty, výpočty při finančních operacích a jednoduchých měřických pracích se v 16. století prováděly ve stále větší míře písemným počítáním pomocí indickoarabských číslic; starší způsob počítání na abaku ustupoval do pozadí. (Podrobný výklad tohoto vývoje je obsažen v Juškevičově knize od str. 339 do konce.)

Náročnější výpočty pomocí tabulek sinů byly potřebné v zeměměřictví, astronomii a mořské navigaci; v těchto oborech se v Evropě používaly především šedesátinné zlomky, jen někteří učenci dávali přednost desetinným zlomkům a přepočítávali tabulky. V šedesátkové soustavě byly "necelé části" čísel vyjadřovány v minutách (minuta prima = zmenšená první), sekundách (minuta secunda = zmenšená druhá), terciích, kvartách atd. Například polovina měsíce, tj. průměrná doba od konjunkce k opozici Měsíce a Slunce, se udávala jako tento násobek dne:

$$14 \quad 45' \quad 55'' \quad 3''' \quad 48^{IV} \text{ dne ,}$$

což znamenalo $14 + \frac{45}{60^1} + \frac{55}{60^2} + \frac{03}{60^3} + \frac{48}{60^4}$ dne v našem zápisu.

Stále složitější výpočty založené na rovinné a sférické trigonometrii a nezbytné pro vyměřování pozemků, mořeplavbu, astronomická bádání, stavby pevností, vodních cest atd. bylo třeba nějak ulehčit. Konec 16. století a začátek 17. století přinesl novinky - plnější uplatnění desetinných čísel, záporných čísel a vytvoření logaritmů. Tyto události si přiblížíme ukázkami z děl Stevina a Napiera.

A. Práce Simona Stevina z r. 1585

Vlámský učenec žil v letech 1548 - 1620, pomáhal Nizozemí v bojích za nezávislost a v úsilí o hospodářský rozmach; prováděl proto mnoho zeměměřičských a inženýrských výpočtů. V roce 1585 vydal dva spisy; jeden propagoval počítání s desetinnými čísly, druhý měl i z části algebraický obsah. Všimejte si symboliky zavedené Stevinem pro mocnitele jedné desetiny, resp. neznámé.