4. Číselné obory. Intuitivní zavedení reálných čísel na ZŠ. Mocniny a odmocniny.

Irena Budínová

Intuitivní zavedení množiny reálných čísel na základní škole

Děti se ve skutečné výuce na základní škole s reálnými čísly v podstatě nesetkají. Jediná reálná čísla, která žáci pro různé výpočty potřebují, jsou odmocniny a π. Číslo π však bývá hned od začátku zaokrouhlováno na 3,14 a např. $\sqrt{2}$ na 1,41. Iracionalita těchto čísel tedy zůstává zcela utajena.

Kladením správných otázek můžeme u žáků docílit postupného utváření pojmu iracionálního čísla.

1. Jaké číslo bezprostředně následuje po čísle 1? (7. třída)
   Můžeme vybrat číslo 1,0001, menší je číslo 1,00001, atd. Takto můžeme pokračovat až donekonečna. Následovník čísla 1 tedy neexistuje.
2. Jaký je bezprostřední předchůdce čísla 1?
   Nabízí se číslo $0,\overline{9}$.
3. Čemu je rovno číslo $0,\overline{9}$? (8. třída)
$$0{,}999\ldots = x$$
$$9{,}999\ldots = 10x$$
$$9 = 9x \Rightarrow x = 1$$
$$0,\overline{9} = 1$$
   Vypočítali jsme, že číslo, které se tvářilo jako bezprostřední předchůdce čísla 1, je samo číslo 1. Kam se poděl malý kousíček, o který se daná čísla liší? Žádný neexistuje.
4. Čemu je rovno $\frac{9}{3}$? (8. třída)
$$9 \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot 0,\overline{3} = 2{,}99999\ldots = 2,\overline{9}$$
$$3 = 2,\overline{9}$$
5. Ukažte, že číslo 0,12345678910111213... (píšeme za sebou všechna přirozená čísla) je iracionální. (9. třída)
   Žáci základní školy mohou příklad řešit úvahou. Víme, že dané číslo vzniklo z po sobě jdoucích přirozených čísel. Každé je jiné, proto není možné najít periodu. Nejedná se o důkaz, avšak příklad vytváří velmi dobrou představu iracionality.
   Důkaz je možné provést sporem. Budeme předpokládat, že dané číslo je racionální, to znamená, že má nekonečný desetinný periodický rozvoj s délkou periody n. V daném čísle někde jistě najdeme posloupnost n devítek. Perioda je tedy složena ze samých devítek. Je ale zřejmé, že už dříve jsme se museli setkat s posloupností n osmiček. Tím se dostáváme ke sporu.

6. Co kdybychom v předcházejícím čísle odstranili desetinnou čárku? Dostali bychom číslo 12345678910111213... Jedná se o nekonečně velké číslo?[1]

Dalšími otázkami lze utvářet pojem množiny. Žáci by měli rozlišovat mezi konečnou množinou, nekonečnou množinou a intervalem. Na střední škole se s těmito pojmy automaticky pracuje, ačkoli na základní škole nebyly vůbec zavedeny.

7. Kolik prvků má množina $\{1; 2; 3; \dots\}$? Kolik prvků má množina $\{1; 3; 5; \dots\}$? (9. třída)
   Obě množiny mají nekonečně mnoho prvků.
8. Která z těchto množin má více prvků? (9. třída)
   Žádná – každému prvku první množiny můžeme přiřadit právě jeden prvek druhé množiny.

$$\begin{array}{c} 1 \to 1 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 5 \\ \vdots \end{array}$$

   Všechny spočetné nekonečné množiny mají stejnou velikost v Cantorově smyslu. Jsou to nejmenší nekonečna, jaká mohou existovat, Cantor je označil $\aleph_0$ (první písmeno hebrejské abecedy, alef nula).
9. Je množina zlomků od 1 do nekonečna spočetná množina?
   Cantor pomocí tzv. diagonální metody dokázal, že ano:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\cdots$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
$\vdots$				

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & & \\ \frac{3}{1} & \frac{2}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} \end{array}$$

[1] První, kdo zavedl pojmy potenciální a aktuální nekonečno, byl Aristoteles. Přivedlo ho k tomu přemýšlení nad Zenonovými paradoxy. Byl přesvědčen o tom, že je možno donekonečna přičítat jednotku a tím získávat větší a větší čísla. Pořád ale budou vznikající čísla konečně velká. Nekonečně velké číslo podle něj neexistuje. To znamená, že nekonečno potenciálně existuje, avšak aktuálně ne. Řešení součtu nekonečných řad (které se vyskytují i v Zenonových paradoxech) je však umožněno uznáním aktuálního nekonečna, kdy nekonečnou řadu pokládáme za celek.

Touto metodou jsme schopni postupně vypsat všechny zlomky, žádný zlomek nevypadne. Množina racionálních čísel (zlomků) je tedy spočetně nekonečná.

10. Je množina reálných čísel spočetně nekonečná?
    Cantor dokázal, že ne (Barrow, s. 67). Reálných čísel je nekonečně větší nekonečno než přirozených čísel, toto nekonečno se nazývá kontinuum.
11. Kolik je přirozených čísel na intervalu $\langle 1; 2\rangle$?
    Dvě.
12. Kolik je racionálních čísel na intervalu $\langle 1; 2\rangle$? (9. třída)
    Můžeme vždy pro jakákoli dvě různá čísla daného intervalu najít jejich aritmetický průměr. Např. $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \frac{1+\frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}, \ldots$ Na daném intervalu je tedy nekonečně mnoho racionálních čísel.
13. Kolik je reálných čísel na intervalu $\langle 1; 2\rangle$?
    Nekonečně mnoho. Mezi libovolnými dvěma racionálními čísly existuje nekonečně mnoho iracionálních čísel.

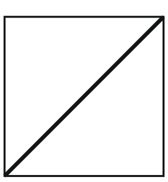
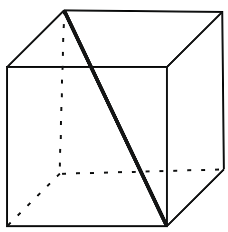
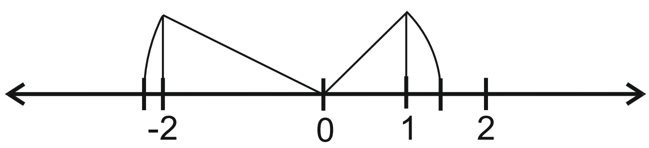
Na prvním stupni základní školy se žáci seznamují s pojmem přirozeného čísla. Množina přirozených čísel má velmi příjemné vlastnosti: Je možné ji jednoduše uspořádat, každé číslo má svého bezprostředního následovníka, na konečném intervalu je konečně mnoho přirozených čísel apod. Žáci si velice často myslí, že stejným způsobem se chovají všechny další číselné obory.

Množina racionálních čísel si zachovává některé příjemné vlastnosti, např. racionální čísla lze uspořádat, i když už ne tak snadným způsobem, jako to bylo u přirozených čísel. Avšak na konečném intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních čísel.

Vlastnosti reálných čísel jsou pro mnoho žáků zcela nepochopitelné: Žádné číslo nemá svého bezprostředního následovníka, množinu nelze uspořádat, mezi každými dvěma racionálními čísly leží nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Geometrické konstrukce některých reálných čísel

Délku $\sqrt{2}$ má úhlopříčka čtverce o straně 1, délku $\sqrt{3}$ má tělesová úhlopříčka krychle o hraně 1. Žáci mohou některé iracionální délky konstruovat pomocí Pythagorovy věty nebo Eukleidových vět. Obrazy reálných čísel mohou znázorňovat na číselné ose.

Setkávání se s množinami u funkcí

Žáci by se měli setkávat s množinami v podobě definičního oboru a oboru hodnot, se zápisy jako $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 1;\ \infty),\ D(f) = \{1; 2; 3\}$, aj., ale měli by jim zároveň rozumět.

Mocnina

Ve školské matematice zavádíme mocninu jako zkrácený zápis součinu dvou (nebo více) sobě rovných činitelů.

$$5 \cdot 5 = 5^2, 6 \cdot 6 = 6^2, 15 \cdot 15 = 15^2$$

obecně

$$a \cdot a = a^2.$$

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3, 1{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 = 1{,}3^3, (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$$

obecně zavedeme n-tou mocninu reálného čísla

$$a^n.$$

Číslo a se nazývá **základ** a číslo n se nazývá **mocnitel** (exponent).

Definice: Druhá mocnina celého (racionálního, reálného) čísla je součin dvou sobě rovných činitelů.

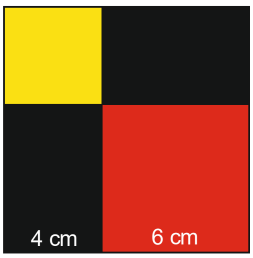
Žáci se postupně učí mnoho pravidel pro počítání s mocninami, ve většině z nich dělají chyby ještě na střední nebo na vysoké škole. Důvodem je, že si pravidla dostatečně nezvnitřní a pak výpočty všemožně zjednodušují. Např. $2^3 + 3^3 = 5^3, 2^2 \cdot 2^3 = 4^6, \frac{4^6}{2^3} = 2^2$ a mnoho jiných. Jaké jsou možnosti předcházet těmto chybám? Některé příklady lze znázorňovat pomocí čtvercové sítě (zejména umocňování dvojčlenů), jiná pravidla lze modelovat mnoha příklady před zavedením obecného vzorce (např. $a^n \cdot b^n = (ab)^n, a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Místo klasického postupu *pravidlo* ⇨ *procvičování* je výhodnější volit postup *pozorování* ⇨ *zobecňování*. Využíváme přitom kalkulačku:

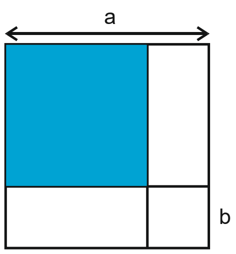
$$2^2 \cdot 3^2 = 36 = 6^2, 2^3 \cdot 5^3 = 1000 = 10^3, \ldots$$

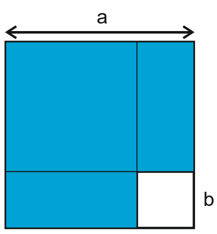
žáci pozorují výpočty, podle svých možností zobecní pravidlo. Obdobně

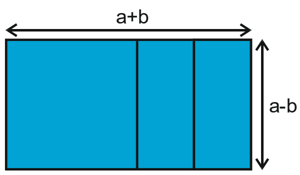
$$4^2 \cdot 4^3 = 16 \cdot 64 = 1024 = 4^5, 5^3 \cdot 5^5 = 390\,625 = 5^8.$$

Geometrické znázornění alg. výrazů: Binomická krychle – vyvození vztahů $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$, **trinomická krychle** – pro umocňování trojčlenu. Pro případ $(a+b)^2$ mohou žáci vymýšlet další příklady, které zakreslují do čtvercové sítě a pravidlo si fixují.









Další vzorce: $(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2, a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Žáci čtverec rozstříhají a přesouvají dílky.

Ve výuce je možné využívat následující metody a činnosti:

- počítání s kalkulačkou, učitel musí žáky seznámit s tím, jak kalkulačku správně používat,
- manipulativní činnost se čtvercovou sítí (čtverečkovaným papírem),
- využívání odhadů,
- cvičení paměti – pamětné zvládnutí druhé mocniny čísel 0 až 20, třetí mocniny čísel 0 až 10,
- určování druhých mocnin pomocí algoritmu: např. pro umocňování dvojciferných čísel využíváme vztahu pro druhou mocninu dvojčlenu: $(10a+b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10 \cdot ab + b^2$. Např. $47^2 = (40+7)^2 = 100 \cdot 4^2 + 20 \cdot 4 \cdot 7 + 7^2 = 1600 + 560 + 49 = 2209$. Je vhodná činnost pro procvičování operací.

Druhá odmocnina

Odmocňování je inverzní operací k umocňování. Můžeme však odmocňovat druhou odmocninou pouze kladná čísla a výsledkem je pouze kladné číslo. To se žákům na základní škole těžko vysvětluje, protože důvod lze ukázat na grafu kvadratické funkce a grafu funkce druhá odmocnina a s těmito grafy se seznamují až na střední škole. Na základní škole můžeme uvést alespoň toto zdůvodnění: **Výsledkem odmocňování musí být jedno konkrétní číslo**.

Definice: Druhá odmocnina z nezáporného čísla a je nezáporné číslo b, pro které platí $b^2 = a$. Zapisujeme $\sqrt{a} = b$.
Pojmy: odmocnitel, základ odmocniny, odmocnina

Algoritmus pro výpočet druhé odmocniny:

$\sqrt{5|56|96}$ $\quad \sqrt{5} = \mathbf{2}$

-4

$156 \quad\quad 15:4 = \mathbf{3}, 43 \cdot 3 = 129$

-129

$2796 \quad\quad 279:46 = \mathbf{6}, 466 \cdot 6 = 2796$

-2796

0

$\sqrt{55696} = 236$

Odmocňované číslo rozdělíme na skupiny po dvou od desetinné čárky na obě strany. Přibližně odmocníme první skupinu odleva: $\sqrt{5} = 2$, toto je číslice nejvyššího řádu odmocniny. Její kvadrát odečteme od první skupiny. K rozdílu připíšeme další dvojčíslí. Oddělíme poslední číslici a zbytek dělíme dvojnásobkem částečného výsledku, tento podíl připíšeme k dvojnásobku částečného výsledku a ještě jím násobíme. Součin odečteme. Pokud je menší než dělitel, připíšeme číslici k částečnému výsledku odmocniny. Dále k výsledku připíšeme další dvojčíslí. Opět dělíme dvojnásobkem částečného výsledku a postup opakujeme, pokud odmocninu nevypočítáme.

Zobecnění na n-tou odmocninu (pro liché odmocniny můžeme odmocňovat i záporná čísla a výsledkem je záporné číslo, viz graf), **pravidla** pro počítání s odmocninami.

Pythagorova věta

- Pythagorova věta, její algebraický a geometrický význam.
- Řešení úloh z praxe na užití Pythagorovy věty.
- Důkazy Pythagorovy věty.
- Obrácená věta k Pythagorově větě, zobecněná Pythagorova věta.
- Předpis pro pythagorejské trojice:
    - předpis stanovený pythagorejci: $a = 2n + 1, b = 2n^2 + 2n, c = 2n^2 + 2n + 1$
    - předpis připisovaný Platónovi: $a = 2n, b = n^2 - 1, c = n^2 + 1$

Absolutní hodnota

Absolutní hodnota čísla je pro kladné číslo to stejné číslo a pro záporné číslo je to číslo opačné. Definice, která je uváděna v učebnicích, je pro žáky natolik abstraktní, že důsledkem je nepochopení tohoto pojmu.

Definice: Absolutní hodnota reálného čísla a je

- $|a| = a$ pro $a > 0$,
- $|a| = 0$ pro $a = 0$,
- $|a| = -a$ pro $a < 0$.

Mínus vyskytující se v definici působí na žáky zcela zmatečně.

Žáci by se s absolutní hodnotou měli setkat již v průběhu základní školy. Např. pro určení vzdálenosti obrazu čísla od počátku číselné osy je absolutní hodnota nezbytná. Číslo -5 má od nuly vzdálenost $|-5| = 5$. V učebnicích někdy bývá definice absolutní hodnoty uváděna takto: *Absolutní hodnota racionálního čísla se rovná vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od obrazu čísla nula.* Nejedná se však o definici, pouze o jednu z interpretací absolutní hodnoty.

Literatura:

Barrow, J. D.: *Kniha o nekonečnu.* Praha: Paseka, 2007

Devlin, K.: *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán a Argo, 2011

Seife, Ch.: *Nula.* Praha: Dokořán a Argo, 2005

Ženatá, E.: *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením.* Blug