

Úlohy do semináře DM4

Sestavila Irena Budínová

- Řešte následující úlohu, která typově odpovídá úloze z Matematické olympiády. Vysvětlete postup řešení.
V lichoběžníku $KLMN$ platí, že KL je delší základnou, průsečík úhlopříček P dělí úsečku KM v poměru $4 : 3$ a obsah trojúhelníku KLP je roven $12,5$ cm. Určete obsah celého lichoběžníku.
- Žák má problémy se sčítáním zlomků, sčítá je tak, že součet čítelů dělí součtem jmenovatelů, např.: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$. V čem vidíte příčinu chyby? Jaká nápravná cvičení navrhuje?
- Zdůvodněte (pokud možno různými způsoby), proč platí následující pravidla:
 - Součin dvou záporných čísel je číslo kladné.
 - Dělit nulou nelze.
- Ukažte induktivní a deduktivní přístup při dokazování následujícího tvrzení a dokažte úplnou matematickou indukci.
Číslo $m(m^2 - 7)$ je dělitelné šesti pro libovolné přirozené číslo m .
- Řešte následující slovní úlohy a) experimentálně, b) kongruencemi.
Číslo y dává po dělení pěti zbytek 2 a po dělení sedmi zbytek 4. O jaké číslo se jedná?
- Dokažte, že $\sqrt{21}$ není racionální číslo. Znázorněte úsečku délky $\sqrt{21}$ cm
 - pomocí Pythagorovy věty,
 - pomocí Eukleidových vět.
- Vyslovte větu o podílu dvou odmocnin a ověřte ji na úrovni ZŠ.
- Na následující úloze vysvětlete problematiku části procentového počtu.
Cena kabátu byla nejprve zvýšena o 20 % a potom byla tato nová cena snížena o 35 %. Nyní se kabát prodává za 3 990 Kč. Jaká byla jeho původní cena před zdražením?
- Řešte následující slovní úlohu a ukažte různé přístupy k řešení:
Honza, David a Kája mají dohromady ušetřeno 4 070 Kč. Kája ušetřil o 180 Kč méně než Honza, David dvakrát méně než Honza. Kolik korun ušetřil každý z nich?
- Řešte metodou falešného předpokladu: Ke čtvrtině neznámého čísla jsme přičetli třetinu tohoto čísla a od výsledku odečetli 5. Získali jsme 16. Jaké je neznámé číslo?
- Vyslovte a dokažte větu o úhlopříčkách čtverce.
- Řešte následující slovní úlohu i) pomocí rovnic, ii) pomocí funkcí (graficky):
Za chodcem jdoucím průměrnou rychlostí 4 km/h vyjel z téhož místa o 2 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od výchozího místa dohoní cyklista chodce?

13. Řešte aritmeticky: Kolik litrů vody je třeba přilít k 7 litrům lihu o koncentraci 72 %, abychom získali líh o koncentraci 44 %?
14. Naleznete koeficienty a tvar kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$, jestliže víte, že součin kořenů je roven $-\frac{5}{2}$ a součet kořenů $-\frac{3}{2}$.
15. Řešte úlohu prostředky žáka ZŠ: Obdélník má obsah 96 čtverečních jednotek. Jeho šířka je o 4 délkové jednotky větší než jeho délka. Určete rozměry obdélníku.
16. Řešte v oboru reálných čísel rovnici pouze ekvivalentními úpravami:

$$\frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{x+2}{x-5} - \frac{2}{x-2}$$

17. Zakreslete graf funkce $y = 3(5 - x)$ a na postupu vysvětlete transformace grafu.
18. Zakreslete grafy funkcí $y = -x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 4x - 6$. Určete vlastnosti druhé funkce.
19. Racionální lomená funkce: Zakreslete graf funkce $y = \frac{x+2}{x-5}$. Určete vlastnosti této funkce.
20. Jak se změní tlak plynu, jestliže se při stejné teplotě změní jeho objem na dvojnásobek? Zakreslete graf.
21. Goniometrické funkce: Pomocí jednotkové kružnice definujte funkci $y = \operatorname{tg} x$. Dále pomocí jednotkové kružnice určete $\sin \frac{2}{3}\pi$.
22. Máme pravidelný trojboký jehlan o délce hrany základny 2 cm a výšce 4 cm. Určete odchylku a) boční stěny od základny, b) boční hrany od základny.
23. Zjistěte bez kalkulačky za použití pravítka, kružítka a úhloměru úhel α , je-li $\sin \alpha = 0,73$.
24. Planimetrie: Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny jsou v poměru 3:4, rameno je dlouhé 7 cm a výška je 4,5 cm.
25. Míry geometrických útvarů.

Vepište do kružnice o poloměru r postupně rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný šestiúhelník, pravidelný osmiúhelník. Vyjádřete jejich obvody a obsahy pomocí r .

26. Řešte kombinatorické úlohy. Postupujte způsobem odpovídajícím základní škole a pomocí vzorce, který na příkladu osvětlíte.

Kolik přímek je určených 12 různými body v rovině, jestliže právě čtyři z nich leží na jedné přímce a žádné tři další ze zadaných bodů již neleží na jedné přímce?

27. Řešte úlohy z pravděpodobnosti a statistiky:

Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 0 sestavte všechna šesticiferná čísla tak, aby se číslice v zápisu čísla neopakovaly. Náhodně vybereme jedno číslo. Vypočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude i) dělitelné pěti, ii) dělitelné třemi.