Výuka geometrie na základní škole

Irena Budínová

Ve výuce geometrie rozvíjíme žáky v několika oblastech. V prvních letech školní docházky jde o to, aby žáci poznávali jednoduché geometrické útvary, všímali si jejich vlastností a ty postupně byli schopni využívat při řešení aplikačních úloh. Souběžně je potřeba, aby zvládali terminologii, znali názvy pojmů.

Postupně se žáci učí rýsovat základní útvary, jako jsou bod, úsečka, přímka, polopřímka, trojúhelník, obdélník, kružnice.

Již během prvního stupně základní školy si žáci osvojují pojmy obvod a obsah rovinného útvaru, učí se tyto míry určovat u jednoduchých rovinných útvarů.

Během druhého stupně se všechny uvedené části školní geometrie rozšiřují a prohlubují, žáci postupně řeší komplexnější početní či konstrukční úlohy, v nichž využívají svoje znalosti.

Pojmotvorný proces v geometrii

Jedna z uznávaných teorií, kterou vytvořil van Hiele (1986), uvádí pět úrovní, kterými žák postupně prochází během svého pojmotvorného procesu v geometrii. Tato teorie prezentuje nejčastěji používaná označení pro jednotlivé úrovně následovně:

- Úroveň 0: Vizualizace (poznávání a pojmenování obrazců).
- Úroveň 1: Analýza (popis vlastností obrazců).
- Úroveň 2: Abstrakce (neformální dedukce, klasifikace a třídění obrazců podle vlastností).
- Úroveň 3: Dedukce (formální dedukce, schopnost dokazovat tvrzení o vlastnostech obrazců).
- Úroveň 4: Axiomatizace (teoretická matematika).

Na úrovni *vizualizace* posuzují děti geometrické útvary jako celek podle toho, jak na ně útvar působí. V tomto období se nezabývají vlastnostmi daného útvaru a jsou často ovlivněny *prototypy* či *ideálními příklady*, se kterými se setkávají. Děti se do tohoto období obvykle dostávají během mateřské školy, když jsou konfrontovány s předměty ve tvaru geometrických obrazců, a setrvávají v něm zpravidla i na začátku základní školy.

Zhruba v průběhu 3. ročníku by děti měly na základě svých zkušeností s geometrickými útvary přecházet do úrovně *analýzy*. Podle van Hieleho (1986) a dalších výzkumníků by většina dětí měla být na této úrovni v průběhu 4. ročníku. Děti si postupně začínají všímat typických vlastností daného útvaru. Jak uvádí Žilková et al. (2018), přestože si žáci uvědomují některé vlastnosti útvaru, nejsou zatím schopni odlišovat ty vlastnosti, které jsou podstatné pro definování útvaru. Definice žáků jsou proto zatím naivní, nepřesné, obsahující méně nebo více definitorických vlastností.

S přibývajícími zkušenostmi žáci stále víc vnímají vztahy mezi vlastnostmi útvarů, jsou schopni útvary třídit podle různých vlastností, vytvářet jednoduché definice. Dostávají se na úroveň *abstrakce*. Na této úrovni se již nenechávají ovlivňovat tím, jak na ně útvar působí, zvažují vždy jen jeho vlastnosti. Pokud je žák na úrovni abstrakce, neměly by u něj přetrvávat miskoncepce. Žáci by se na tuto úroveň měli dostat v průběhu druhého stupně. Zkušenosti s výukou na základní a střední škole ukazují, že u většiny žáků by bylo dostačující, pokud by se dostali na tuto úroveň a setrvali na ní do konce základní školy.

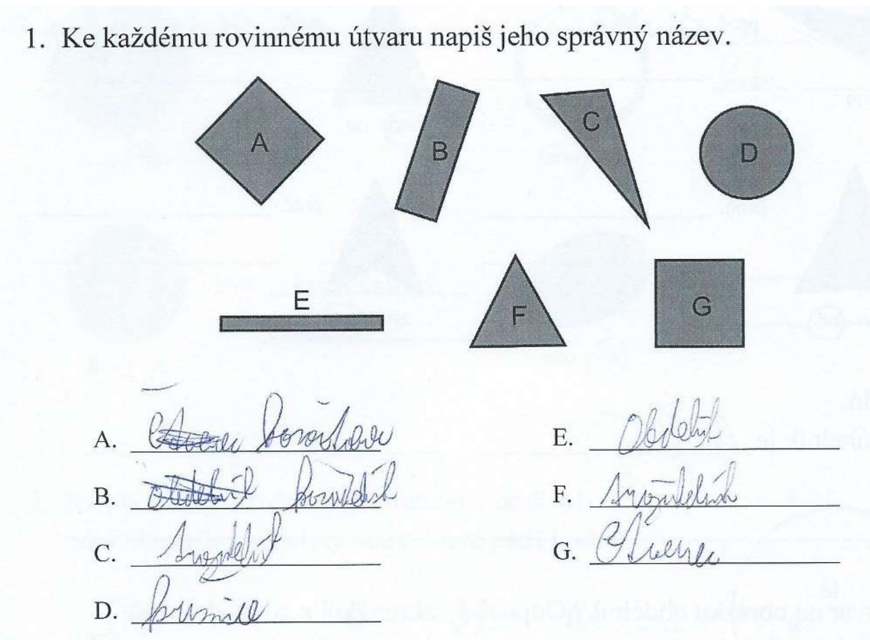
Na úrovni *dedukce* žáci chápou důležitost axiomů a definic, uvažují deduktivně. V případě optimálního poznávacího procesu žáci této úrovně dosáhnou na střední škole. Úrovně *axiomatizace* by potom studenti měli nabýt na vysoké škole.

Je přirozené, že miskoncepcí, tedy mylných představ, o geometrických útvarech ubývá od nulté po čtvrtou úroveň van Hielovy škály. Výše bylo řečeno, že již na úrovni abstrakce by představy žáků měly být dostatečně přesné a naivní představy by měly téměř vymizet.

Výzkum s 237 žáky ze 4., 6. a 8. ročníku základní školy ukázal že některé miskoncepce, které jsou typické pro žáky 1. stupně, časem přirozeně vymizí, zatímco jiné přetrvávají po celou základní školu. Nejčastější jsou:

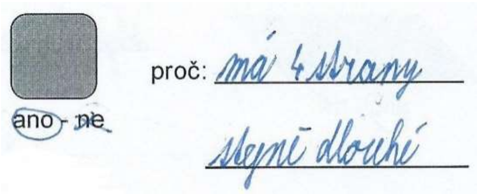
Čtverec:

- Chybná představa, že čtverec otočený na vrchol je kosočtverec, je typická pro žáky 1. stupně, ale ve velkém procentu přetrvává až do 8. ročníku. Tato představa je opakovaně potvrzována v českých i zahraničních výzkumech.



Obrázek 1 Žák 8. ročníku

- Chybná představa, že útvar čtvercového tvaru (např. se zaoblenými stranami či vrcholy) je čtverec, odeznívá ve vyšších ročnících.



Obrázek 2 Žákyně 4. ročníku

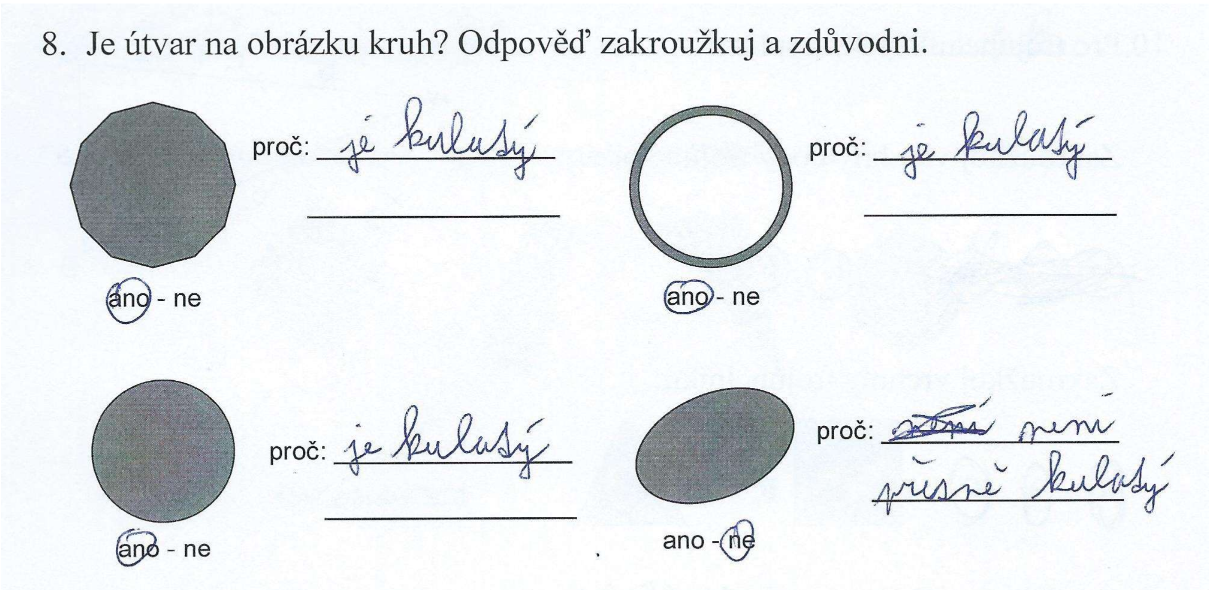
- Žáci za určující vlastnost čtverce chápou zejména shodnost stran, případně počet stran, ani ve vyšších ročnících nepřibývá žáků, kteří by zvažovali i pravé úhly.

Trojúhelník:

- Chybná představa, že tupoúhlý trojúhelník není trojúhelník, je typická pro žáky 1. stupně, odeznívá ve vyšších ročnících.
- I ve vyšších ročnících mají žáci problémy určit, které body patří trojúhelníku. Typická je představa, že trojúhelník je uzavřená lomená čára. Žáci mají i další mylné představy o tom, zda trojúhelníku patří vrcholy, vnitřní body či body hranice.

Kruh, kružnice:

- Obdobně jako u trojúhelníku mají žáci i ve vyšších ročnících problémy určit, který bod náleží kruhu a který kružnici. Žáci tyto pojmy zaměňují. Někteří si myslí, že kruh je doplněk kružnice. Problematický je střed, u nějž není jasné, zda náleží kružnici či nikoli.
- Představa o kruhu je postavena na pojmu „kulaté“, což pro většinu žáků znamená „dokonale kulaté“. Ve vyšších ročnících někteří žáci začínají o kruhu přemýšlet i v souvislosti s poloměrem.



Obrázek 3 Žák 6. ročníku

- Žáci až do vyšších ročníků neovládají pojem mezikruží. Mezikruží přitom může sloužit jako efektivní protipříklad pojmu kruh a rovněž kružnice. Žáci si tak mohou lépe upřesňovat představu o daných pojmech.

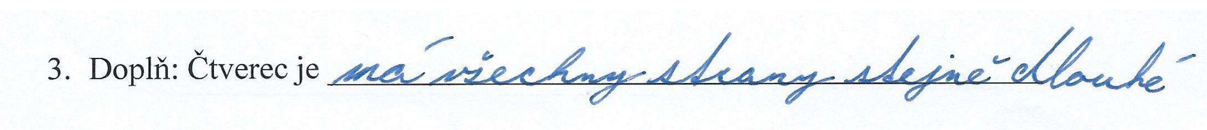
Ukázalo se, že ve vnímání rovinných útvarů jsou určité aspekty, které lze spatřovat jako problematické pro žáky základní školy. V geometrii se setkáváme s rovinnými útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh aj.) a s křivkami (např. kružnice a elipsa). Předpokládám, že s klasifikací rovinných útvarů na rovinné plochy a rovinné křivky se žáci na základní škole nesetkají, a tak je ponecháno víceméně na jejich intuici a případně na zkušenosti, jak si dané pojmy zařadí. Z výsledků úloh vidíme, že žáci v tomto třídění příliš jasno nemají. Pomohlo by jim pracovat s papírovými modely, na nichž by bylo patrné, zda k útvaru patří i vnitřní oblast, či nikoli. Taková aktivita by žákům umožnila začít přemýšlet nad rozdílem mezi rovinnou křivkou a plochou. Jako další aktivity, které by žákům pomohly posílit správné vnímání geometrických rovinných pojmů, lze doporučit vystřihování papírových modelů, skládání papíru, rýsování v programu GeoGebra aj.

Schopnost definovat pojmy

Schopnost definovat geometrické pojmy souvisí s pojmotvorným procesem žáků. Žáci by měli pojmy vymezovat nejdříve intuitivně, na základě získaných zkušeností. Na 1. stupni ZŠ a v nižších ročnících 2. stupně je žádoucí i jakási naivita ve vyjadřování, kterou by měl učitel uváděním dalších příkladů a protipříkladů postupně zpřesňovat. V nejvyšších ročnících základní školy by si žáci měli uvědomovat, že pro každý pojem existuje jistý počet vlastností, kterými jsme schopni daný pojme jednoznačně vymezit. Tyto vlastnosti chápeme jako *definitorické*, ostatní vlastnosti je nutné ověřovat.

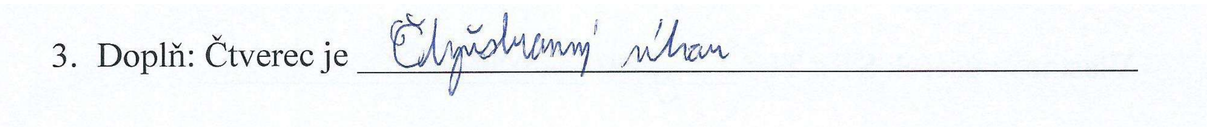
Pokud poznávací proces neprobíhá optimálně, žáci nad vlastnostmi útvarů nepřemýšlí a po celou dobu základní školy u nich může přetrvávat nepřesné či dokonce chybné vnímání objektů. Ve výše zmíněném výzkumu, který se pokusil zaměřit i na stránku definování pojmů, se ukázalo, že když se žáci začínají odklánět od naivních definic k matematicky přesnějším vymezením, nejdříve si vybírají jednu vlastnost objektu, se kterou se nejspíše nejčastěji setkávali. U čtverce se jedná v největším procentu případů o shodnost stran. Kolmost sousedních stran se objevuje až ve vyšších ročnících a jen u malého procenta žáků.

Na obrázku 4 žákyně 4. ročníku zvažuje jednu vlastnost čtverce: shodnost stran.



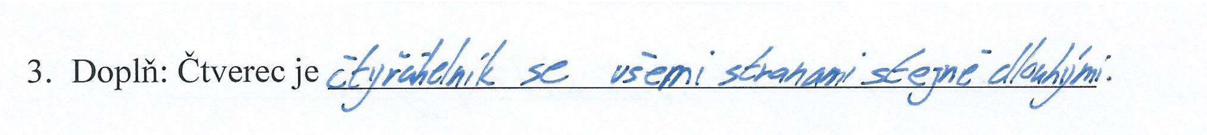
Obrázek 4 Žákyně 4. ročníku

Na obrázku 5 žák 6. ročníku zvažuje jednu vlastnost čtverce: počet stran.


3. Doplň: Čtverec je Čtyřstranný úhar

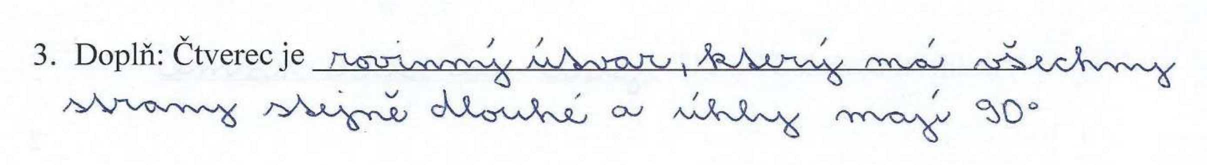
Obrázek 5 Žák 6. ročníku

Na obrázku 6 žák 6. ročníku zvažuje dvě vlastnosti: počet stran a shodnost stran.


3. Doplň: Čtverec je čtyřúhelník se všemi stranami stejně dlouhými.

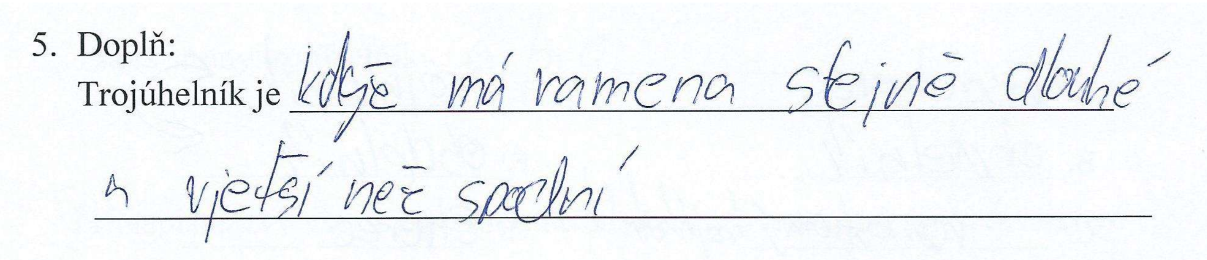
Obrázek 6 Žák 6. ročníku

Na obrázku 7 vidíme sofistikovanější odpověď žákyně 8. ročníku: zvažuje tři vlastnosti čtverce, definice již nyní vymezuje skutečně čtverec.


3. Doplň: Čtverec je rovinný útvar, který má všechny strany stejně dlouhé a úhly mají 90°

Obrázek 7 Žákyně 8. ročníku

Obdobné to je s dalšími pojmy, s nimiž se žáci setkávají v průběhu základní školy. V případě pojmu *trojúhelník* se můžeme setkat s naivními definicemi, s definicemi, na nichž se projeví, že žák desinterpretoval nějaký poznatek (viz obrázek 8) a s přesnějšími definicemi, které vycházejí z toho, že trojúhelník je rovinný útvar se třemi stranami.


5. Doplň:
Trojúhelník je kdyže má ramena stejně dlouhé a vjetší než spodní

Obrázek 8 Žák 6. ročníku - definuje rovnoramenný trojúhelník

Více viz Budínová, I. (2021). Vývoj představ žáků o geometrických pojmech v průběhu základní školy. *Učitel matematiky 29(1)*, 1-25.

V průběhu 2. stupně se žáci důkladněji seznamují také s pojmy prostorové geometrie. S tím je spojena celá řada dalších dovedností, jednou z nich je znázornění trojrozměrného útvaru na papír, tedy zobrazení 3D do 2D. Učí se nové termíny (například hrana vs strana). Je důležité mít správnou představu tělesa i jeho sítě, za tím účelem žáci pracují s modely těles a jejich sítěmi.

Míra v učivu geometrie základní školy

Žáci se od 4. ročníku postupně učí měřit či určovat obvody rovinných útvarů, obsahy rovinných útvarů, povrchy prostorových útvarů a objemy prostorových útvarů. Esenciální je při těchto činnostech pochopení pojmu *jednotka*. Ve výuce je možné postupovat tak, že si žáci určí nejdříve svoji vlastní jednotku a s tou budou pracovat. Délková jednotka pro ně bude úsečka určité délky, z ní pak vytvoří čtvereční jednotku a krychlovou jednotku (na naráz, v průběhu let). Při určování míry nějakého objektu se potom jedná o *porovnávání velikosti daného objektu s jednotkou*. Poté se teprve zavádí konvenční jednotky – v našem případě cm apod.

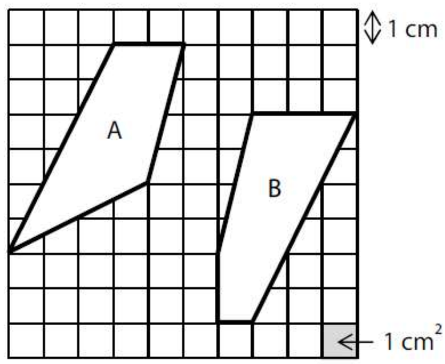
Vondrová (2015) upozorňuje, že geometrická algebra, kterou k výpočtům používáme, je nejabstraktnějším vyvrcholením práce s geometrickými útvary. Výuka by jí měla končit, nikoli začínat. Žáci se se vzorci seznamují hned v úvodu učiva. Jejich znalosti jsou povrchní a procedurálně zaměřené, pletou si vzorce pro obvod a pro obsah, někdy dokonce vůbec nerozlišují mezi obvodem a obsahem. Nechápou vztahy mezi vzorci (třeba mezi čtvercem a obdélníkem, čtvercem a trojúhelníkem aj.).

Testy Cermat pro 5. a 7. ročník vycházejí z hlubšího porozumění pojmům obvod a obsah. Žáci pracují s útvary, pro něž neznají vzorec na výpočet obvodu či obsahu a musí prokázat své pochopení určení těchto měr. Obvykle se vychází z práce ve čtvercové síti.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

Čtvercová síť je tvořena čtverečky s délkou strany 1 cm a obsahem 1 cm^2.

Ve čtvercové síti jsou zakresleny bílé obrazce A, B s vrcholy v mřížových bodech.



(CZVV)

max. 4 body

8 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (8.1–8.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
8.1	Obsah obrazce A je stejný jako obsah obrazce B.	☐	☐
8.2	Obsah obrazce A je větší než 12 cm^2.	☐	☐
8.3	Obvod obrazce A je větší než obvod obrazce B.	☐	☐

Obrázek 9 Ukázka úlohy z testu Cermat, 5. ročník, 2018

Na 2. stupni se rozšiřují poznatky z 1. stupně. Postupujeme vždy od jednotky k dalším útvarům. Například při zavedení vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku je možné postupovat v tomto směru:

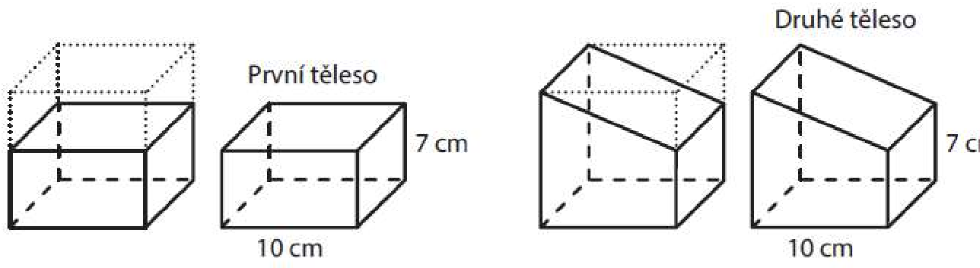
jednotkový čtverec → čtverec s celočíselnými délkami stran → čtverec s racionálními délkami stran → obdélník s celočíselnými délkami stran → obdélník s racionálními délkami stran → kosodélník → trojúhelník

Obdobná schémata existují i v trojrozměrné geometrii. Celá řada začíná u jednotkové krychle, pomocí níž lze vyvozovat jednotlivé vzorce a postupně zobecňovat na náročnější útvary.

V testech Cermat jsou úlohy z prostorové geometrie opět voleny tak, aby formální znalost vzorce nebyla postačující podmínkou vyřešení úlohy. Žáci musí prokázat hlubší porozumění a také vhled a nápad, jako v úloze na obrázku 10, která je určena žákům 7. ročníku.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Ze dvou krychlí s hranou délky 10 cm jsme vytvořili dvě nová tělesa.
První těleso vzniklo z krychle po odříznutí části tvaru kvádru.
Druhé těleso vzniklo z krychle po odříznutí části tvaru trojbokého hranolu.
Nejkratší hrana prvního i druhého tělesa měří 7 cm.



(CZVV)

max. 4 body

7 Vypočtěte v cm^3 objem

7.1 prvního tělesa,

7.2 druhého tělesa.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy **postup řešení**.

Obrázek 10 Úloha z testu Cermat pro 7. ročník, 2019

Konstrukční úlohy

V oblasti konstrukčních úloh se žáci postupně od 1. stupně seznamují s rýsováním základních útvarů a postupně přibývá požadavků na výsledný obrazec. Žáci přitom zužitkují své teoretické znalosti o geometrických pojmech a jsou na ně kladeny další nároky: motorická zručnost, přesnost, jemnost, nošení a udržování rýsovacích pomůcek.

Konstrukční úloha má několik fází: *rozbor a náčrt, konstrukce a popis konstrukce, počet řešení, zkouška správnosti, diskuse v případě obecně zadané úlohy*. Každá fáze má svůj účel – v rozboru žák plánuje postup řešení, který poté uskutečňuje v konstrukci, kterou popisuje v jednotlivých bodech. Popis se provádí v symbolickém matematické jazyku, pokud jej již žák ovládá. V opačném případě může své kroky popisovat i slovně. Zkouškou správnosti se ujišťuje o tom, že našel útvar požadovaných vlastností.

Z výzkumů vyplývá, že řada učitelů ztotožňuje geometrii s rýsováním a konstrukcemi (Vondrová, Havlíčková, 2015). Učitelé spatřují v oblasti výuky konstrukčních úloh několik problémů: stav jemné motoriky současných žáků, pokles jejich zájmu o přesnost a estetiku vůbec; špatný technický stav rýsovacích pomůcek a málo příležitostí k procvičení.

Rozbor je klíčovou fází řešení, ovšem ve výzkumu Vondrové a Havlíčkové (2015) se dotazovaní učitelé soustředili zejména na procedurální stránku věci. Šlo jim hlavně o „správné“ (tj. učitelem preferované) pořadí jednotlivých kroků a o používání matematických značek. Učitel ve velké míře uznávali, že fáze rozboru je nejobtížnější částí řešení konstrukčních úloh.

Literatura:

Budínová, I. (2021). Vývoj představ žáků o geometrických pojmech v průběhu základní školy. *Učitel matematiky 29(1)*, 1-25.

Van Hiele, P. M. (1986) *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press.

Vondrová, N. (2015). Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles. In Vondrová, Rendl a kol.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Karolinum.

Vondrová, N., Havlíčková, R. (2015). Konstrukční úlohy v řešení žáků napříč ročníky základní školy. In Vondrová, Rendl a kol.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Karolinum.

Žilková, K., Partová, E., Kopáčová, J., Tkačik, Š., Mokriš, M., Budínová, I. & Gunčaga, J. (2018). *Young children's concepts of geometric shapes.* Harlow: Pearson.