Státnicová otázka č. 11

Historie matematiky

Irena Budínová

Vývoj matematiky rozdělujeme na několik hlavních etap:

- **První etapa** (paleolit – 5. st. př. n. l.) je období vzniku a formulace základních matematických pojmů. Trvá mnoho tisíciletí. Formuluje se aritmetika i geometrie, avšak vše je úzce spojeno s praxí. Tato etapa končí tehdy, když v Řecku vzniká tzv. „čistá matematika" s logickou soustavou vět a jejich důkazů.
- **Druhá etapa** (5. st. př. n. l. – počátek 17. st.) je etapa tzv. elementární matematiky, matematiky **konstantních veličin**.
- **Třetí etapa** (17. st. – začátek 19. st.) je nazývána obdobím matematiky **proměnných veličin**. Matematika buduje aparát k popsání změny, pohybu – vzniká matematická analýza a analytická geometrie.
- **Čtvrtá etapa** (19. st. – dodnes), období matematiky současné – má vysoce abstraktní ráz, ale také má vysokou praktickou aplikovatelnost.

Výsledky první etapy a začátky druhé tvoří v podstatě obsah učiva dnešních základních škol. Výsledky druhé etapy tvoří náplň středních škol, zejména ve vyšších ročnících. S třetí etapou se seznamují studenti na vysokých školách. S výsledky čtvrté etapy se seznamují specialisté – odborní matematikové, pracovníci z jiných vědních oborů apod.

První etapa

Základní klíč k objasnění původu matematiky doby kamenné byl objeven na konci 30. let 20. století, když archeolog Karel Absolon nalezl v Dolních Věstonicích asi 30 000 let starou vlčí kost s řadou zářezů. Zdá se, že v samotných začátcích matematiky lidé uměli rozlišovat pouze mezi pojmy jeden a mnoho. Časem si primitivní jazyky vyvinuly schopnost rozlišovat mezi jeden, dva a mnoho, eventuelně **jeden, dva, tři a mnoho**, ale stále neměly označení pro vyšší čísla.

Po nějaké době začali šikovní členové pravěkých kmenů skládat značky různě za sebe, navazovat do řad. Např. na kosti z Věstonic byly vruby uspořádány po pěti a velký vrub označoval skupinu pěti pětic. Příčinu asi můžeme hledat v počtu pěti prstů na ruce.

Pojem přirozeného čísla byl zpočátku vázán na konkrétní předměty (např. počet ulovených ryb), vývojem pak byl stále více chápán jako charakteristika toho, co je společné všem ekvivalentním množinám – což je základem definice **kardinálního čísla**.

Názvy čísel – **číslovky** – byly zpočátku přídavnými jmény odvozenými od předmětů vyskytujícím se vždy v určitém počtu. Zpočátku se používaly číslovky jedna, dvě, tři a vše ostatní bylo mnoho (podobný proces lze sledovat i dnes u malých dětí). Později, když bylo třeba rozšířit užívaný počet číslovek, opakovaly se nejprve známé číslovky, později dostávala větší čísla zvláštní jména. Největší číslovkou se stávaly postupně 5, 6, 10, 12, 20, 60.

Pro praktické využití matematiky vznikaly různé numerační systémy. Ukázalo se, že soustavy s nižším základem (2, 5) jsou nevhodné, protože se v nich velká čísla zapisují velkým počtem znaků. Soustavy s velkým základem (16, 20, 60) se v praxi rovněž neosvědčily, neboť k jejich užívání je třeba zapamatovat si velký počet znaků. Egypťané používali desítkovou soustavu, Mayové dvacítkovou soustavu (zřejmě proto, že chodili bosí a k počítání používai i prsty na nohou), Babylóňané šedesátkovou soustavu (používali kmenové zlomky a 60 má hodně dělitelů). V přirozeném výběru se udržela **soustava desítková** (kromě měření času, tam sedodnes používá šedesátková soustava, důvodem je opět hodně dělitelů čísla 60).

Po celá tisíciletí bylo sčítání a odčítání jedinými matematickými operacemi. Ve starověku se nejčastěji počítalo na abaku. Postupně vzniklo i násobení – nejprve jako zdvojnásobování. Vznik násobení souvisel s měřením obsahů pozemků a zemědělství. Dělení vzniklo mnohem později než násobení. Poměrně brzy se utvořil pojem jedné poloviny, zezačátku však nesouvisel s číslem 2. Představa o tom, že dělení je inverzní operace k násobení, byla výsledkem dlouhého vývoje matematického myšlení.

Rozvoj geometrických pojmů souvisel s měřením délek, obsahů a objemů různých předmětů. Výborní geometři byli staří Egypťané. Nil každoročně vystupoval z břehů a zaplavoval oblast delty. Řeka vždy poničila mezníky vyznačující pozemky jednotlivých majitelů. Egypťané brali vlastnická práva velmi vážně. Proto egyptští faraóni zavedli funkci odhadců – zeměměřičů, kteří znovu dosazovali mezníky na jejich původní místa.

Od 4. tisíciletí př. n. l. se tvořily a rozvíjely **otrokářské státy** v Egyptě, Mezopotámii, Číně a Indii, které nahrazovaly prvobytně pospolné zřízení. Nároky na matematiku vzrůstaly (zeměměřičství, obchod, daňový systém, kalendář, měření času).

Egypt: Zprávy o egyptské matematice čerpáme ze zachovalých papyrů. Zejména je to papyrus Ahmesův (papyrus Rhind – uložený v Britském muzeu v Londýně), který pochází z období asi 2000 let př. n. l., a papyrus Moskevský, asi o 200 let starší. Egypťané užívali desítkovou soustavu. Vytvářeli zvláštní znak pro každou mocninu 10. Nepoužívali poziční systém (znaky opakovali a kladli vedle sebe), nepotřebovali symbol pro nulu. Užívali zlomky, které vznikly při měření a dělení pozemků na části a při vytváření kalendáře.

Mezopotámie: Používali poziční systém. Jednotka byla zaznamenávána svislým klínem, dvě jednotky dvěma klíny, desítka klínem lomeným. Znaky se psaly na hliněné tabulky pomocí dřevěných tyčinek. Tento způsob zapisování čísel převzali a rozvinuli Babyloňané, kteří ovládli kolem roku 1800 př. n. l. celou Mezopotámii.

Babylonská numerace byla vybudována na základech deset a šedesát. Pro zapsání jakkoli velkého čísla stačily dva znaky (klín pro 1, 60, 3600 aj. a zobáček pro 10, 600, aj.). Soustava byla poziční. Nejdříve nezavedli nulu, ač ji potřebovali, neboť zápisy byly nejasné – jeden klín znamenal 1 i 60. Někdy kolem roku 300 př. n. l. začali používat symbol dvou šikmých klínů, který reprezentoval prázdné místo odpovídající volnému sloupci v abaku (nula). Pracovali s tabulkami funkcí (druhých a třetích mocnin, multiplikačními, převrácených hodnot apod.). Měli také dobře rozvinutou algebru, uměli řešit kvadratické rovnice a soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých.

Egyptští a babylonští matematikové vykládali úlohy dogmaticky a bez důkazů, přestože je zřejmé, že se výsledků nemohlo dosáhnout jen empirickou cestou bez teoretického myšlení. Byl položen základ algebraického způsobu myšlení, který přešel do Indie a Řecka a odtud prostřednictvím Arabů a národů střední Asie i do Evropy.

Řecko: V průběhu 8. – 6. st. př. n. l. došlo k hospodářskému rozkvětu, rozvoji námořního obchodu, vzniku jednoduché abecedy místo hyeroglifického písma. Bylo nutné, aby vzdělanost pronikla do širších vrstev národa. Řečtí matematikové rozšířili a prohloubili znalosti, které převzali z Egypta a Mezopotámie.

Řecká aristokracie považovala praktické zaměstnání za potupné a pohrdala i aritmetikou, tj. praktickými výpočty, které musí provádět obchodník. Naproti tomu geometrii s jejími deduktivními úvahami považovala za důstojné zaměstnání pro lidi, kteří nemusejí získávat obživu nedůstojnou praktickou činností. Tím začala vznikat matematika jako teoretická věda.

Druhá etapa

Zhruba od 6. st. př. n. l. se matematické poznatky nezískávaly pouze experimentálně, ale stále výrazněji se uplatňovalo odůvodňování na základě logicky správně prováděného usuzování. Matematika se měnila v **nauku deduktivní**. Toto období je často charakterizováno jako období **statické matematiky**. Tato etapa trvala přibližně dvě tisíciletí a je možno ji rozčlenit na několik období, která se liší svým obsahem a zaměřením.

V **Řecku** se rozvíjela především geometrie. Nejvýznamnější matematici: Thales z Miletu, Pythagoras, Platón, Aristoteles, Eukleides, Archimedes, Apollonios z Pergy, Erastothenes, Diofantos z Alexandrie aj. O každém z těchto matematiků by studenti měli něco vědět.

Řekové zdědili svá čísla z egyptské geometrie. V důsledku toho neexistoval v řecké matematice podstatný rozdíl mezi tvary a čísly. Tento vliv se projevuje dodnes – rovnici druhého stupně označujeme jako kvadratickou (kvadrát = čtverec), třetího jako kubickou (kubus = krychle). Podobně existují čtvercová a trojúhelníková čísla. V oněch dobách často stačilo k důkazu matematické věty načrtnout elegantní obrázek.

Pythagorova věta bylaformulována již dříve Babylóňany a Číňany, více než 1000 let před Pythagorem. Pythagoras nebo někdo z jeho školy zveřejnil první důkaz věty. Pythagoras (6. st. př. n. l.) byl znám svým zájmem o hudbu a o poměr. Pythagorejci věnovali značnou část energie zkoumání vlastností různých podílů. Jedním z těchto podílů bylo i „nejkrásnější“

číslo na světě, tzv. **zlatý řez**. Se zlatým řezem se můžeme setkat v přírodě (ulita loděnky) a umění a architektuře. Pythagorejci věřili, že pro zlatý řez existuje poměr.

Pythagorejská matematika narazila i na další problémy – **kvadraturu kruhu** (je možné pouhými pravítky a kružítkem vytvořit čtverec, jehož plocha by byla stejná jako plocha daného kruhu?) a **trisekci úhlu** (lze rozdělit úhel na tři díly?)

Pythagorejci byly nuceni objevit iracionální čísla, když se zabývali měřením délky úhlopříčky čtverce. Důkaz nesouměřitelnosti délky úhlopříčky patří k jednomu z nejstarších důkazů vůbec. A aby toho nebylo málo, pythagorejci objevili, že mezi iracionální čísla patří dokonce zlatý řez, pro ně hlavní symbol krásy a racionality. Tento objev ohrozil celou jejich filozofii a proto musel být držen v tajnosti.

Řekové měli ve zvyku shromažďovat své geometrické poznatky do souborů, zvaných „Stoicheia", latinsky „Elementa" čili „Základy". Tradici těchto Základů dovršil svým znamenitým spisem, napsaným kolem roku 325 př. n. l., **Eukleides**. Eukleides byl zastáncem tzv. „čisté matematiky". V jeho spisech nejsou obsaženy žádné aplikace matematiky, nejsou tu ani poučky pro výpočet délek čar, obsahu obrazců nebo objemů těles – mluví se zde vždy jen o poměrech těchto veličin. Eukleidův spis se stal učebnicí geometrie na dva tisíce let.

Úpadek starověké matematiky nastal s úpadkem řecké hospodářské společnosti, vrcholící zvláště na počátku našeho letopočtu. Římané – dědicové řecké politické a hospodářské moci – se nestali důstojnými pokračovateli starořeckých matematiků.

Asijská matematika: Ve 4. st. př. n. l. vtáhl Alexandr Veliký se svými vojsky z Alexandrie do Indie. Díky této invazi se indičtí matematici poprvé dozvěděli o babylónské číselné soustavě a převzali ji. Indie byla dostatečně vzdálena, aby později unikla vlivu křesťanství a Aristotelovy filozofie (která zakázala nulu a zbrzdila vývoj matematiky o stovky let). Indická matematika se tak mohla vyvíjet zcela nezávisle.

Indická matematika byla spíše aritmetická a názorná, oproti řecké geometrii. Indové používali, podobně jako Egypťané, provazů k vyměřování polí a projektování chrámů. Měli rovněž promyšlený astronomický systém; podobně jako Řekové se snažili vypočítat vzdálenost Země od Slunce. K tomu potřebovali trigonometrii, která byla pravděpodobně odvozena z řecké. Vrcholného období dosáhla indická matematika ve dvou obdobích. První se vyznačuje jmény matematiků **Arybhata** (6. st.), **Brahmagupta** (7. st.) a druhé představuje matematik **Bhaskara** (12. st.).

Největší zásluhu o rozvoj matematiky si získali Indové myšlenkou psaní čísel pomocí **deseti znaků** a zavedením poziční hodnoty číslic. Naše číslice pocházejí z indických. Potřebovali zavést také nulu, nejdříve jako symbol pro prázdnou pozici v abaku, později jako číslo.

Čísla se odloučila od geometrických tvarů. Na rozdíl od Řeků Indové neviděli ve druhé mocnině čtverec, násobení dvou různých čísel nechápali jako ekvivalent určení plochy obdélníku. Začalo vznikat matematické odvětví, které dnes nazýváme jako **algebra.** Matematikové se mohli začít pouštět do početních operací, jejichž geometrická analogie nedávala žádný smysl. Nelze pokosit tři ary sena na dvouarovém poli, ale 2-3 počítat lze. Tak vznikla záporná čísla a nula.

Indický matematik ze 7. st. Brahmagupta stanovil pravidla pro dělení a zahrnul do nich také záporná čísla (např. záporné číslo dělené záporným číslem dává jako výsledek kladné číslo). Brahmagupta dokonce nulou i dělil, myslel si, že 0:0=0, ale nevěděl, co je 1:0. Indové si ale brzy uvědomili, že 1:0 je nekonečno. O tom píše již matematik Bhaskara z 12. st.

Čínské, indické a řecké vědomosti převzali **Arabové** a arabsky píšící národy – proto naše číslice označujeme jako arabské. Muslimové si rychle osvojovali znalosti národů, které si podrobili. V 9. st. byla v Bagdádu založena velká knihovna zvaná „Dům moudrosti“. Bagdád se stal centrem vzdělanosti celého východního světa. Jedním z prvních učenců, kteří zde působili, byl i matematik **Al-Chórezmí**, nazývaný otcem algebry. Jeho kniha **Al-jabr wa'lmuqabala** obsahovala návody, jak řešit jednoduché rovnice. Z označení Al-jabr (zhruba odpovídá našemu „završení“ či „sjednocení“) pak vznikl termín algebra. Slovo *algoritmus* pochází ze jména Al-Chórezmího a označovalo způsob, jak rychle násobit a dělit indické číslice.

Křesťanský starověk a středověk celkem nepřispěl k dalšímu vývoji matematiky. Národy Evropy se jen pozvolna seznamovaly s arabskými matematickými spisy. Latinské výtahy z řeckých spisů byly nedokonalé. K posunu došlo od 13. do 15. století, a to díky obchodu, který kladl zvýšené nároky na početní techniku. V této době působil **Leonardo Pisánský**, známý spíše pod jménem **Fibonacci**, syn italského obchodníka. Roku 1202 předložil ve své knize **Liber Abaci** (kniha o abaku) tuto úlohu: Sedlák vlastní párek mladých králíků. Králíkům stačí na dosažení dospělosti 2 měsíce a od té doby jsou schopni produkovat začátkem každého měsíce novou dvojici králíků. Když tito dospějí, plodí zase dál. Celkový počet králíků po měsících odpovídá Fibonacciově posloupnosti 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Počet párů v každém měsíci je vždy roven součtu ve dvou měsících předcházejících. Navíc podíly 8/5, 13/8, 21/13, ... se čím dál více blíží hodnotě zlatého řezu, 1,61803... Fibonacciho kniha ale také vysvětlovala, jak pomocí arabských číslic provádět násobení, po čemž rychle sáhli italští obchodníci a bankéři.

Vynalezení knihtisku koncem 15. století umožnilo širší a rychlejší rozšiřování vědomostí mezi lidem. V té době se rozvíjela zejména trigonometrie, nauka o rovnicích vyšších stupňů a počítání s písmeny. Byla soustavně propracovávána nauka o desetinných zlomcích a byly objeveny logaritmy.

Algebra, zvláště nauka o rovnicích vyšších stupňů, byla v 16. století úspěšně budována v Itálii. **Scipione del Ferro** a **Geronimo Cardano** se zabývali řešením rovnic třetího stupně, **Lodovico Ferrari** objevil obecné řešení rovnic čtvrtého stupně. Byly zavedeny symboly pro matematické operace. Francouzský matematik **Francois Viete**, známý zejména vztahy mezi kořeny a koeficienty rovnice, zavedl psaní písmen ve významu čísel a tím dovršil dosavadní dialektický vývoj pojmu čísla.

Počátkem 17. století byl objeven logaritmus. Logaritmus objevil a pojmenoval skotský matematik **John Napier**, který jako první uveřejnil tabulky logaritmů. Při jejich sestavování využil vztah mezi geometrickou posloupností, vytvořenou z postupných mocnin jistého základu a aritmetickou posloupností jejích exponentů, který znal už Archimédes. Základem tohoto vztahu byla skutečnost, že vynásobením dvou členů geometrické posloupnosti je exponent jejich součinu roven součtu příslušných členů aritmetické posloupnosti (např. $2^4 . 2^6=16 . 64=1024=2^{10}=2^{4+6}$).

Již 20 let poté objevili logaritmus jako funkci nezávisle na sobě francouzští matematici **Pierre de Fermat** a **René Descartes**. Objevem analytického zadávání funkce otevřeli novou epochu v matematice. Tím končí druhé nejdelší období vývoje matematiky jako statické nauky o číslech, veličinách a geometrických útvarech.

Třetí etapa

Vývoj matematiky v dalším období byl podmíněn požadavky společenské praxe, která vyžadovala dokonalejší aparát pro zvládnutí zákonů pohybu, změn a studium závislostí mezi různými veličinami. Vzhledem k tomu, že většina matematiků té doby byla zároveň fyziky, vychází matematické poznatky ze studia fyzikálních zákonů.

Fermat už před Descartem zavedl **pravoúhlé souřadnice** a vytvořil tzv. souřadnicovou metodu, kterou aplikoval v geometrii. René Descartes rozvinul myšlenku určení funkce pomocí analytického výrazu v jeho knize „La Géométrie“ (1637). (využíval rovnice $P(x,y)=0$). Tato Descartova myšlenka umožnila sledovat vlastnosti křivek pomocí algebraických metod. Ukázal, že rovnice s proměnnými x, y je velmi účinným prostředkem pro zadání závislosti mezi veličinami. Tato závislost umožňuje vypočítat libovolnou hodnotu jedné z nich pomocí formule, využitím hodnot druhé veličiny.

Ve druhé polovině 17. století byl v matematice učiněn zásadní objev, který umožnil rozšířit analytický způsob zadání funkce na funkce rozložitelné do nekonečných řad. Prvním matematikem, který tuto metodu použil, byl N. Kaufman (1620 – 1687), známý pod jménem Nicholas Mercator. S rozklady funkcí do mocninných řad se zabýval hlavně významný anglický matematik a fyzik **Isaac Newton** (1643 – 1727), který našel mocninné řady pro racionální mocniny funkce $(1+x)^{-1}$.

Jednou z nejdůležitějších úloh, kterou Newton, Leibniz a další řešili, byl výpočet obsahu útvaru ohraničeného křivkami. Newton postupoval tak, že nejprve křivce přiřadil její analytické vyjádření, příslušnou křivku vyjádřil ve tvaru mocninné řady a integrováním člen po členu získal hledaný obsah.

Newton ještě nepoužívá slovo funkce (pro označení explicitně zadané funkce používá termín ordináta). Samotný termín funkce (z latinského slova functio – úkon, vykonávání) zavedl v roce 1673 německý matematik **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716), avšak ve smyslu více méně geometrickém. V dnešním významu (ve smyslu analytického výrazu) poprvé slovo funkce použil roku 1698 **Johann Bernoulli** (1667 – 1748).

Úspěchy diferenciálního a integrálního počtu podnítily matematiky k hlubšímu zájmu o pojem funkce. Například Johann Bernoulli rozvinul teorii exponenciální funkce a pojem funkce definuje takto: „Funkcí proměnné veličiny se nazývá kvantita sestavená libovolným způsobem z této proměnné veličiny a konstant.“

Rozvoj pojmu funkce výrazně ovlivnil, a to po obsahové i formální stránce, jeden z největších matematiků všech dob **Leonhard Euler** (1707 – 1783).

Zpočátku byla funkce považována za proměnnou veličinu, jejíž hodnoty jsou určovány podle nějakého vzorce (tzv. analytické vyjadřování funkce) libovolně volenými hodnotami druhé proměnné veličiny (nezávisle proměnné). Další vývoj matematiky vedl ovšem k daleko obecnějšímu pojetí funkce, které je založeno na pojmu **zobrazení množin**. Toto pojetí funkce však mohlo být uskutečněno teprve v dalším – čtvrtém vývojovém období matematiky, kdy byla teorie množin vybudována.

Čtvrtá etapa

V 19. století byl stále více zdůrazňován názor, že matematika je věda o mnohem obecnějších kvantitativních vztazích, než jakými jsou čísla a veličiny, a o mnohem obecnějších prostorových formách, než jsou obyčejné geometrické útvary o jednom, dvou nebo třech rozměrech. Začala vznikat matematika, která má naprosto abstraktní charakter, a přitom dovede řešit i nejkonkrétnější úkoly, které jí předkládá praxe.

Teorie funkcí se osamostatnila od infinitezimálního počtu a zásluhou celé řady matematiků se stala jednou z nejdůležitějších oblastí matematiky. Významní matematici: **Bolzano, Cauchy, Riemann, Abel, Weierstrass**.

V první polovině 19. století dochází k rozvoji **komplexních čísel**, která začali Nor Wessel a Němec Gauss znázorňovat pomocí bodů roviny. Němečtí matematikové Weiersttrass, Dedekind, Cantor a Francouz Méray položili vědecké základy teorii **iracionálních čísel**. Jejich úvahy o iracionálních číslech byly podnětem pro vytvoření pojmu množiny a ke vzniku **teorie množin**. Za zakladatele teorie množin je považován **G. Cantor**. Stejně jako v historii záporných čísel a komplexních čísel, objevila se v začátcích budování teorie množin řada logických rozporů. Ty vedly některé konzervativní matematiky k přesvědčení, že teorie množin nepatří do matematiky a měla by z ní být vyloučena. Teprve začátkem 20. století vybudoval matematik **E. Zermelo** teorii množin na axiomatickém základě. Tím byly odstraněny hlavní rozpory.

Na podkladě teorie množin vznikla brzy řada nových matematických nauk – množinová topologie, funkcionální analýza, teorie reálných funkcí, teorie svazů, matematická logika aj.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij zkoumal pátý Eukleidův postulát (postulát rovnoběžnosti – ke každému bodu a přímce existuje právě jedna přímka, která prochází bodem a je rovnoběžná) a to ho vedlo k myšlence vybudovat novou geometrii, ve které tento axiom neplatí. Tato geometrie se nazývá geometrií Lobačevského nebo **neeuklidovskou geometrií**.

Matematické úvahy čtvrtého období jsou zcela odděleny od názorných představ, jsou zavedeny abstraktní pojmy a geometrické představy (prostoru o více než třech rozměrech). Abstraktní matematika však nalézá uplatnění v mnoha vědních oborech – společenské dění, dobývání kosmického prostoru, v biologii, lékařství, ekonomii apod.

Literatura:

BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN, 1959

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.: *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: UJEP, 1987

DEVLIN, K.: *Jazyk matematiky.* Praha: Dokořán, 2011

SEIFE, CH.: *Nula.* Praha: Dokořán, 2005